Onde meccaniche

1. Velocità delle onde
2. Equazione delle onde
3. Onde di compressione
4. Soluzioni dell'equazione delle onde

Onde meccaniche

Onde meccaniche: trasporto di oscillazioni da un punto all'altro di un sistema senza un corrispondente trasporto di massa

Sistema: corpo solido, liquido o gassoso

Onde

Perturbazioni meccaniche che si propagano con una velocità che dipende dalla natura della perturbazione e dalla natura del mezzo

Acqua
Corde
Membrane

Trasversali: l'oscillazione avviene in direzione perpendicolare alla direzione del trasporto dell'energia

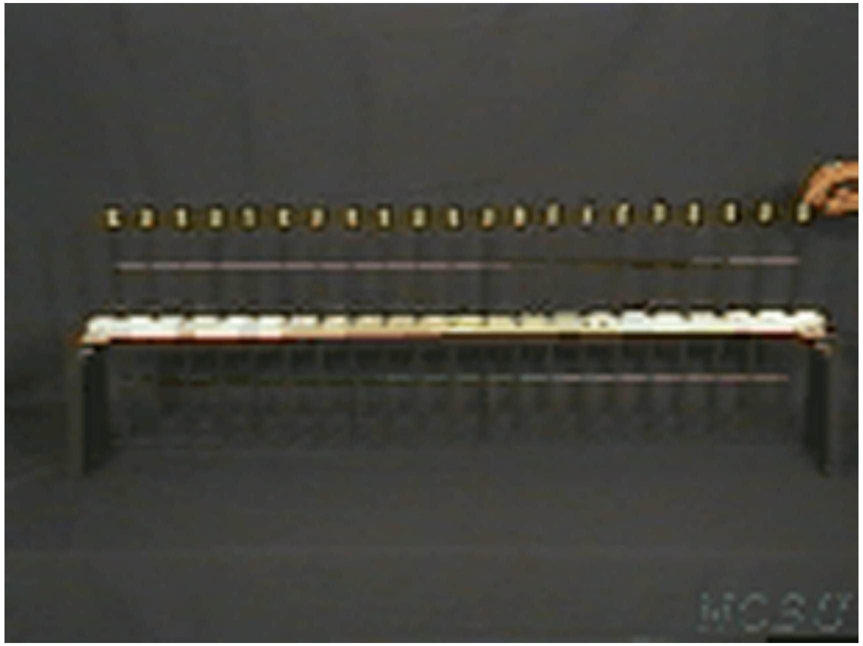
Sonore (di compressione)

Longitudinali: l'oscillazione avviene in direzione parallela alla direzione del trasporto dell'energia

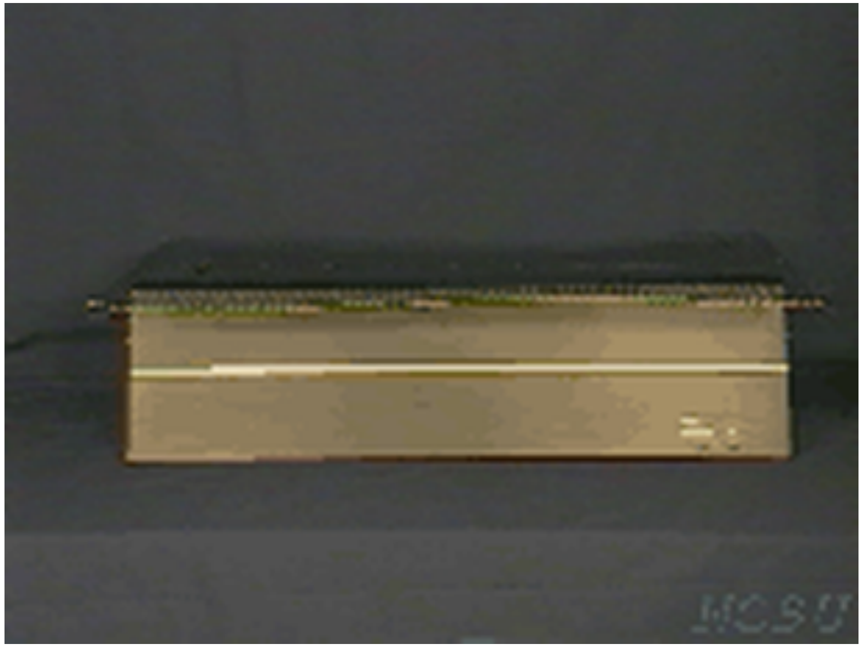
Treno d'onde: perturbazioni limitate nello spazio (es: un colpo di martello ad un capo di una barra)

L'onda si propaga in modo indipendente dal meccanismo fisico che la produce

Esempi

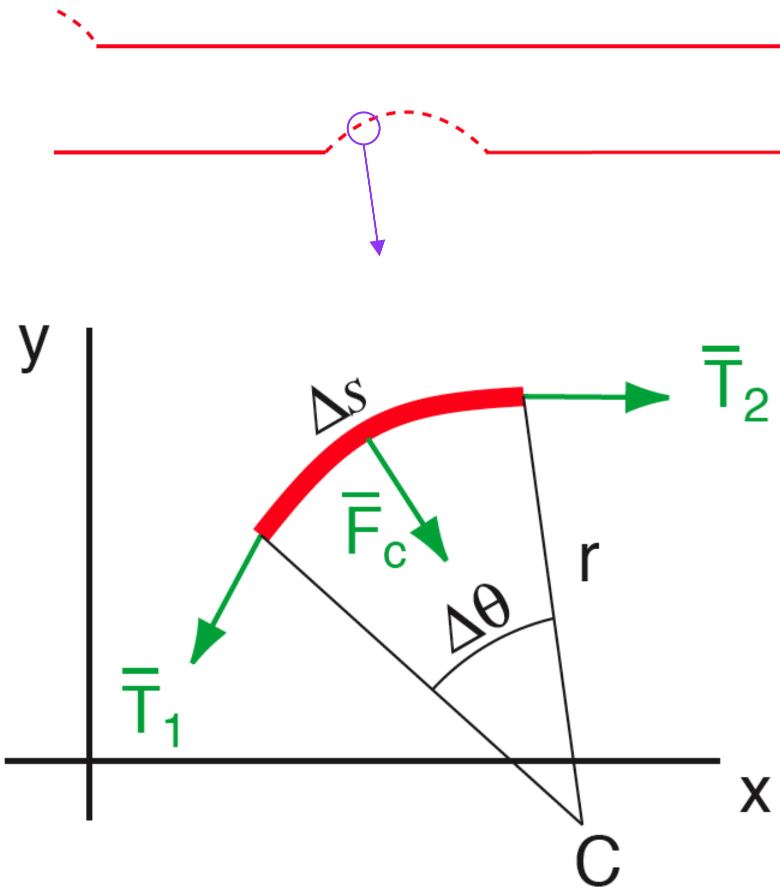


Onda longitudinale



Onda trasversale

Onde su corda tesa



$T=|T_1|=|T_2|$ = *tensione della corda*

ρ_l = *densità lineare*

$$\Delta m = \rho_l \Delta s$$

$$|\bar{F}_c| = |\bar{T}_2 - \bar{T}_1| = 2T \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{se } \Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \ll 1$$

$$\Downarrow$$

$$|\bar{F}_c| = F_c = 2T\frac{\Delta\theta}{2} = \; T\Delta\theta = T\frac{\Delta s}{r}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow F_c = m a_c = \rho_l \Delta s \frac{v^2}{r} = T\frac{\Delta s}{r}$$

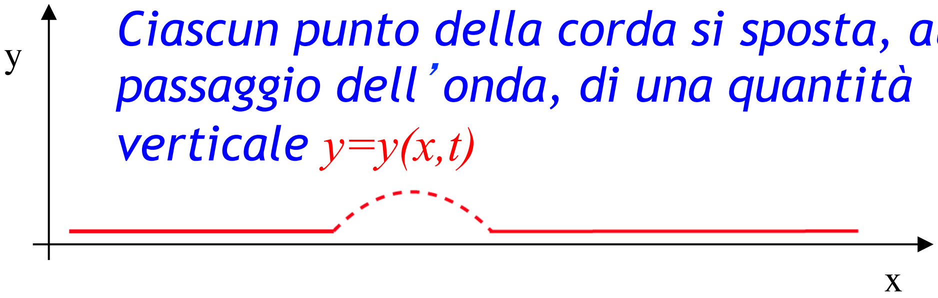
velocità di propagazione dell'onda =
velocità con cui si muove la corda

nel punto di oscillazione la corda si
muove di moto rotatorio infinitesimo
attorno al centro C

$$\rho_l v^2 = T \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}}$$

La velocità di propagazione dell'onda
dipende solo dai parametri della corda,
non dal fenomeno che ha generato l'onda

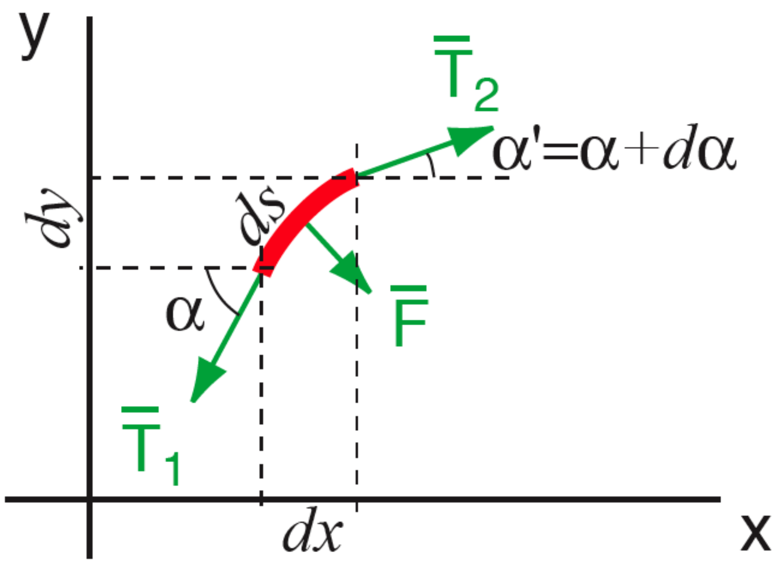
Equazione dell'onda



Ciascun punto della corda si sposta, al passaggio dell'onda, di una quantità verticale $y=y(x,t)$

Approssimazione infinitesima: $\Delta s \Rightarrow ds$

$\Delta\theta \Rightarrow d\theta$



$$
\begin{aligned}
T &= |\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| \\
\bar{F} &= \bar{T}_2 - \bar{T}_1 \\
F_x &= T(\cos\alpha' - \cos\alpha) \\
F_y &= T(\sin\alpha' - \sin\alpha) \\
\cos\alpha' &= \cos\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha\right) dx \\
\sin\alpha' &= \sin\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\right) dx \\
\cos\alpha' - \cos\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha\right) dx \\
\sin\alpha' - \sin\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\alpha \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha \simeq 1 \\ \sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha \end{cases}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\begin{cases}
F_x = T\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha\right) dx \simeq \frac{\partial}{\partial x}1 = 0 \\
F_y = T\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha\right) dx \simeq \\
\quad \simeq T\left(\frac{\partial}{\partial x}\tan\alpha\right) dx = \\
\quad = T\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx
\end{cases}
$$

Equazione dell'onda

Riassumendo, in base a considerazioni geometriche: $\boxed{F_y \simeq T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx}$

Il tratto di corda ds, sottoposto alla forza F_y,
riceve un'accelerazione a_y in direzione y, tale che: $F_y = ma_y$

$$F_y = ma_y = \rho_l ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \ll 1 \Rightarrow ds \simeq dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_y \simeq \rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx}$$

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_l}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

L'equazione che rappresenta lo spostamento meccanico che si propaga assume la forma generale:

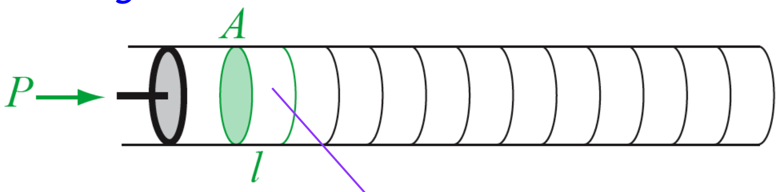
$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial r^2}$$

spostamento dall'equilibrio

direzione di propagazione dell'onda

Onde di compressione in un gas (suono)

Un pistone esercita una pressione P su un gas di densità ρ contenuto in un cilindro di sezione A. Il gas nel cilindro può essere suddiviso in dischi di lunghezza l.



disco: $V=Al$; $m=\rho V$

Se il pistone si muove verso destra di una quantità δl:

- *la pressione sul primo disco diventa δP*
- *il volume del primo disco diventa $V-\delta V$*
- *la lunghezza del primo disco diventa $l-\delta l$*

Ad ogni spostamento del pistone di δl corrisponde la contrazione di un nuovo disco:

velocità pistone

$$v_p dt = \delta l\, dn \Rightarrow \boxed{\frac{v_p}{\delta l} = \frac{dn}{dt}}$$

spostamento del pistone nel tempo dt

numero di dischi compressi nel tempo dt

e tutti i dischi si muovono verso destra con la velocità del pistone.

Il pistone applica una forza:

$$\begin{aligned} F &= \delta P A = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}(m_d n v_p) = \\ &= m_d v_p \frac{dn}{dt} = \rho A l v_p \frac{dn}{dt} \end{aligned}$$

La velocità di propagazione dell'impulso di pressione è maggiore della velocità del pistone:

$$v dt = l dn \Rightarrow \boxed{\frac{v}{l} = \frac{dn}{dt}}$$

nel tempo dt l'impulso di pressione percorre una distanza pari a dn dischi di lunghezza l

$$\boxed{\frac{v}{l} = \frac{v_p}{\delta l} \Rightarrow v_p = \frac{\delta l}{l} v}$$

$$\frac{\delta l}{l} = -\frac{\delta V}{V}$$

perchè il volume del disco diminuisce

$$\begin{aligned} F &= \delta P A \\ &= \rho A l v_p \frac{dn}{dt} = \rho A l v \frac{\delta l}{l} \frac{dn}{dt} \\ &= -\rho A l v \frac{\delta V}{V} \frac{dn}{dt} = -\rho A l v \frac{\delta V}{V} \frac{v}{l} \\ &= -\rho A \frac{\delta V}{V} v^2 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho v^2 = -\delta P \frac{V}{\delta V}$$

Onde di compressione in un gas (suono)

$$\rho v^2 = -\delta P \frac{V}{\delta V}$$

modulo di elasticità volumetrica = P

a temperatura costante: $\delta P = -B \frac{\delta V}{V} = -P \frac{\delta V}{V}$

per compressioni veloci il processo è adiabatico (T cambia, ma non c'è scambio di calore con l'esterno):

$$PV^\gamma = C = \text{costante} \Rightarrow P = \frac{C}{V^\gamma}$$

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV}\left(\frac{C}{V^\gamma}\right) = -C\gamma V^{-\gamma-1} = -C\frac{V^{-\gamma}}{V}\gamma = -\frac{C}{V^\gamma}\frac{\gamma}{V} = -P\frac{\gamma}{V}$$

modulo di elasticità volumetrica per processi adiabatici: $B_{ad.} = \gamma P$

$$dP = -\boxed{\gamma P}\frac{dV}{V}$$

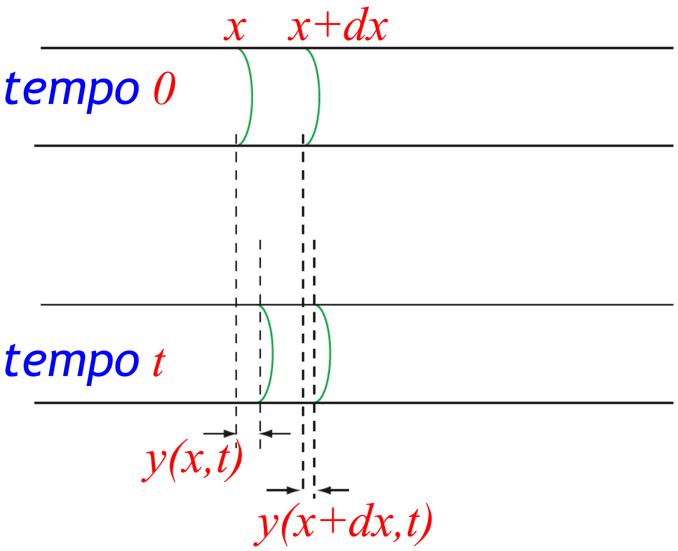
$$\rho v^2 = \frac{P}{V}\gamma V = P\gamma \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_0}}}$$

peso molecolare

$$\frac{P}{\rho} = \frac{PV}{m} = \frac{PV}{nM_0} = \frac{RT}{M_0}$$

La velocità del suono è maggiore in fluidi densi (es.: maggiore nell'acqua che nell'aria) e aumenta all'aumentare della temperatura.

Equazione dell'onda



y(x,t) = *spostamento longitudinale*

durante il passaggio dell'onda:

$$x \Rightarrow x + y(x,t)$$

$$x + dx \Rightarrow x + dx + y(x+dx,t)$$

$$dx \text{ infinitesimo} \Rightarrow y(x+dx,t) = y(x,t) + \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

derivata solo rispetto ad x, non a t

$$l + \delta l = x + dx + y(x+dx,t) - x - y(x,t)$$
$$= dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{\delta l}{l} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Ma: $\frac{\delta l}{l} = -\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta P}{B_{\text{ad.}}} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\delta P}{B_{\text{ad.}}} \Rightarrow \delta P = B_{\text{ad.}} \frac{\partial y}{\partial x}$

Quindi: $\Delta P = \delta P(x+dx) - \delta P(x) = \frac{\partial \delta P}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(B_{\text{ad.}} \frac{\partial y}{\partial x}\right) dx = B_{\text{ad.}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$

Equazione dell'onda

Riassumendo, in base a considerazioni geometriche: $\boxed{\Delta P = B_{\text{ad.}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx}$

Le pressioni esercitate sulle pareti del disco producono una forza netta:

massa contenuta in Adx

$$\Delta P = \delta P(x + dx) - \delta P(x) = \frac{F(x+dx) - F(x)}{A} = \frac{dm}{A} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} =$$
$$= \frac{\rho A dx}{A} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

accelerazione

$$\boxed{\Delta P = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\gamma P}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Velocità delle onde meccaniche

In generale:

$$v = \sqrt{\frac{\text{modulo elastico}}{\text{inerzia}}}$$

Barra solida

onda di pressione: $$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

onda di torsione: $$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

NOTA: la corda, l'aria o la barra restano, in media, ferme

⬇

il moto è quello della perturbazione, non della massa, anche se alla base dell'equazione delle onde c'è la II legge di Newton

Forma generale dell'equazione delle onde

Qualsiasi funzione del tipo: $f=f(x-vt)$, oppure $f=f(x+vt)$ è una soluzione dell'equazione delle onde.

$$z = x - vt; \; \frac{\partial z}{\partial x} = 1; \; \frac{\partial z}{\partial t} = -v$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

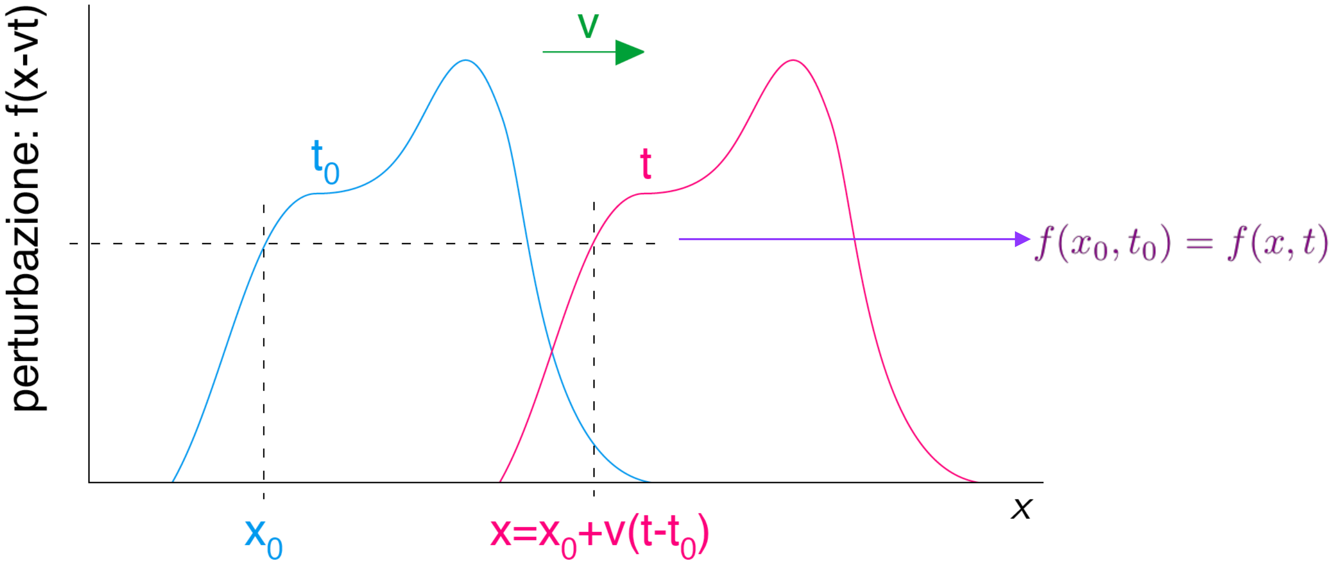
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial z}; \; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right)(-v) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} = v^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

Forma generale dell'equazione delle onde

Graficamente:



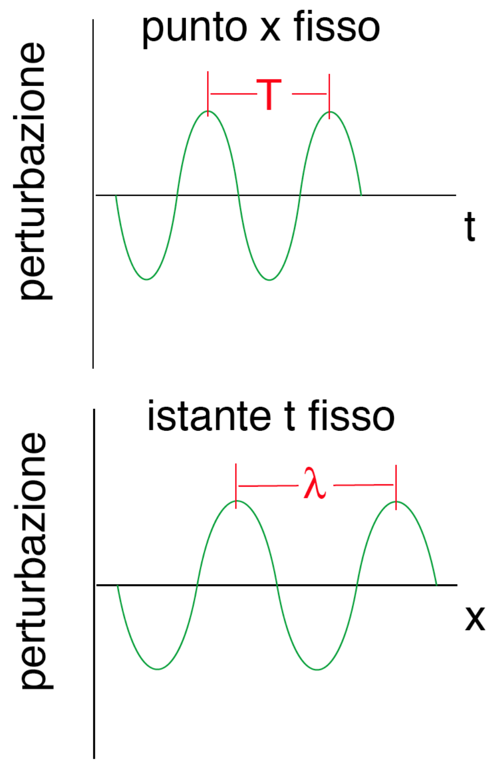
$$f(x_0,t_0) = f(x,t) \Rightarrow x = x_0 + v(t-t_0) \Rightarrow x - vt = x_0 - vt_0$$

$f=f(x\text{-}vt)$ onda che si propaga in direzione delle x positive
$g=g(x+vt)$ onda che si propaga in direzione delle x negative

Onde sinusoidali

Un'oscillazione generata (ad es. su una corda) da un oscillatore armonico semplice avrà una forma del tipo:

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$



dove:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

è la velocità dell'onda e k *è il numero d'onda.*

Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Lunghezza d'onda: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

Nota: $\omega t - kx = k\left(\frac{\omega}{k}t - x\right) = -k(x - vt) \Rightarrow \cos(\omega t - kx) = \cos\left(-k(x - vt)\right)$

e quindi la forma funzionale descrive un'onda.