

Relatività

- 1. Principio di relatività galileiana*
- 2. Esperimento di Mickelson-Morley*
- 3. Espansione dei tempi/contrazione delle
lunghezze di corpi in moto*
- 4. Massa e quantità di moto relativistiche*
- 5. Energia*

Relatività galileiana

Principi:

1. *Le lunghezze e i tempi sono assoluti*

Due oggetti misurati di eguale lunghezza o due orologi sincronizzati restano tali anche quando si muovono di moto relativo.

2. *Le leggi della meccanica:*

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \frac{d(m\overline{v})}{dt} \\ \sum_i \overline{p}_i &= \text{costante} \\ \overline{F}_{12} &= -\overline{F}_{21}\end{aligned}$$

hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Nessun esperimento eseguito interamente all'interno di un sistema di riferimento inerziale può determinare la velocità del sistema rispetto a qualsiasi altro sistema inerziale.

Due elementi hanno portato alla revisione dei principi della relatività galileiana:

- 1. equazioni di Maxwell*
- 2. esperimento di Mickelson-Morley*

Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell portano direttamente al concetto di onda elettromagnetica e ne stabiliscono la velocità (che è la stessa della luce, dal che si dedusse che la luce è un'onda elettromagnetica):

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \bar{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \bar{B} &= 0 \\ \nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B} &= \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \bar{E} &= \rho \mu_0 c^2 \\ \nabla \cdot \bar{B} &= 0 \\ \nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \bar{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Il fatto che la velocità della luce compare in modo esplicito nelle equazioni di Maxwell, le rende non conformi al secondo principio della relatività galileiana: se un sistema è in moto uniforme rispetto alle stelle fisse, la luce avrà, in quel sistema, una velocità diversa da quella determinata dalle equazioni di Maxwell e quindi queste ultime non saranno invarianti rispetto alla scelta del sistema di riferimento.

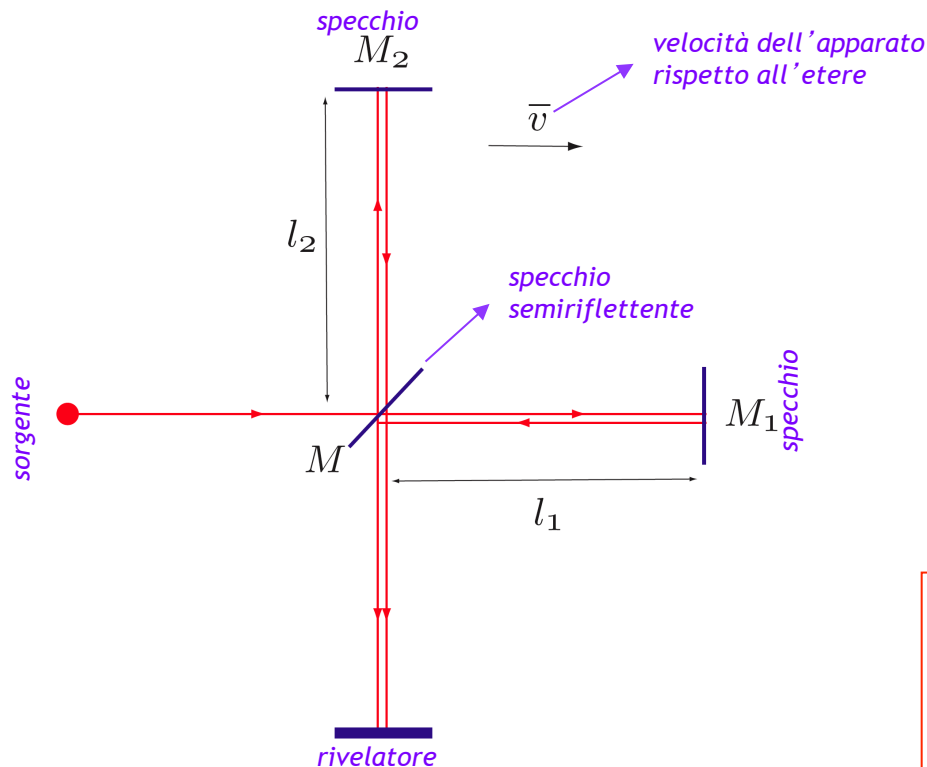
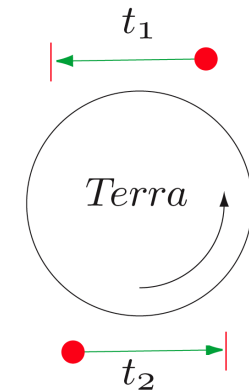
Esperimento di Mickelson-Morley

Verifica dell'ipotesi che le onde elettromagnetiche siano trasmesse attraverso un mezzo meccanico ("etere"), fermo rispetto alle stelle fisse.

Il principio è confrontare la velocità della luce che viaggia nella stessa direzione della rotazione terrestre e di quella che viaggia in senso contrario (t_2 misurato 12 h dopo t_1).

Idem per misure ripetute dopo 6 mesi sfruttando il moto della Terra attorno al Sole.

La superficie della Terra si muove ad una velocità di 463 m/s. La precisione necessaria sulla misura è quindi di meno di 3 parti per milione ($2 \times 463 / 298000000 = 3 \times 10^{-6}$). Per una misura con base di volo di 1 m, la precisione richiesta è migliore di 3 μm : la misura deve essere fatta utilizzando il fenomeno dell'interferenza.



Tempo da M a M_1 e ritorno:

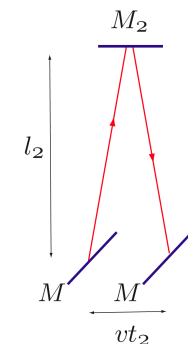
$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = l_1 \frac{2c}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tempo da M a M_2 e ritorno:

$$t_2 = \frac{2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2}}{c}$$

$$t_2^2 = \frac{4l_2^2}{c^2} + t_2^2 \frac{v^2}{c^2}$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Ruotando l'apparato di 90° e ripetendo l'esperimento:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Quindi:

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2 + l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2 + l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Il risultato sperimentale fu:

$$\boxed{\Delta t' - \Delta t = 0} \quad !!$$

Conseguenze

Se è valido il principio di relatività galileiana, allora le equazioni di Maxwell non mantengono la forma per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali.

Possibili soluzioni:

- a) il principio di relatività galileiana è valido per la meccanica ma non per l'elettromagnetismo*
- b) il principio di relatività galileiana è valido per entrambi e le equazioni di Maxwell sono sbagliate*
- c) il principio di relatività galileiana non è valido*

Soluzione di Einstein

- a) *le leggi che regolano i fenomeni fisici sono le stesse in qualsiasi sistema di riferimento (= secondo principio della relatività galileiana)*
- b) *le leggi di trasformazione tra sistemi di riferimento inerziali diversi devono essere compatibili con il fatto che la velocità della luce è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento (modifica del primo principio della relatività galileiana)*

Leggi di trasformazione

In generale, avendo due sistemi S e S' inerziali:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \right\}$$

Combinazione lineare a causa dell'omogenità dello spazio e del tempo. Se la relazione non è lineare, la lunghezza è diversa in punti diversi dello spazio.

$$\text{Se: } x'_2 - x'_1 = a(x_2 - x_1)^2 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} x'_2 - x'_1 = 3a$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 5 \end{aligned} \right\} x'_2 - x'_1 = 9a$$

Se la direzione degli assi x e x' è la stessa, il piano x - y coincide con il piano x' - y' e il piano x - z coincide con il piano x' - z' :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow y' = 0 \\ z = 0 &\Rightarrow z' = 0 \end{aligned}$$



$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned} y' &= a_{22}y \\ z' &= a_{33}z \end{aligned}$$

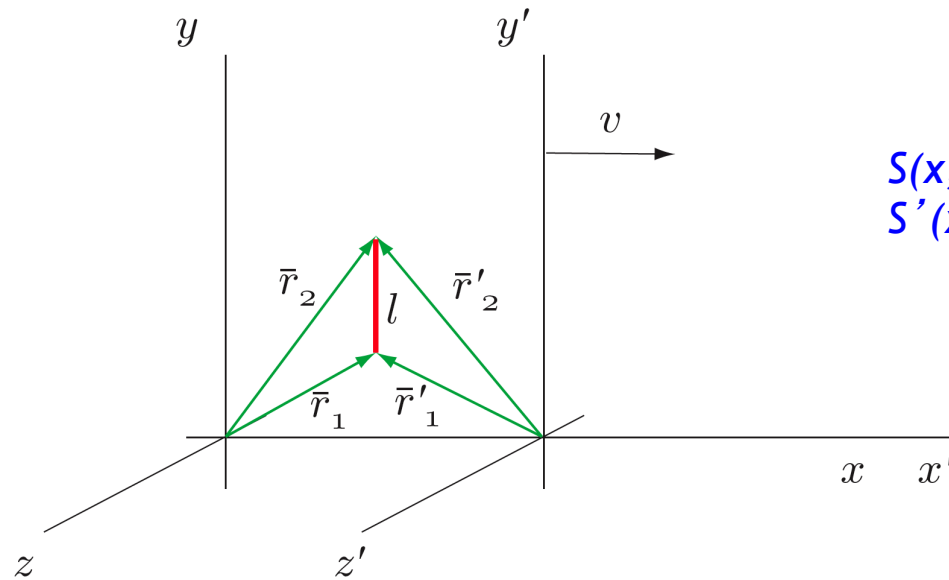


$$a_{22} = a_{33} = 1$$

per simmetria tra S e S'

Restano da determinare i coefficienti relativi a x' e t' .

Lunghezza



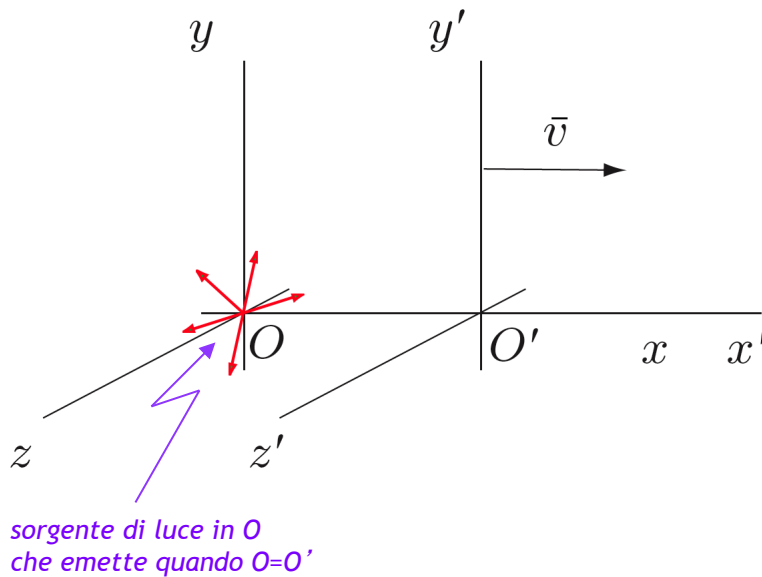
$S(x, y, z)$ fermo

$S'(x', y', z')$ in moto con velocità v lungo x

LEGGE relativa alla lunghezza:

la lunghezza di un segmento è pari al modulo della differenza tra i due vettori che ne definiscono gli estremi:

$$|l_S| = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Nel sistema S , la distanza percorsa dalla luce dopo un tempo t è:

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

Nel sistema S' :

stessa c

trasformazioni galileiane:

$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = |\bar{c} - \bar{v}|t' = |r|$$

trasformazioni di Einstein:

$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct'$$

$$r \neq r' \Rightarrow t \neq t'$$

per un osservatore fermo nel sistema S fenomeni periodici uguali (es: oscillatori identici) non si ripetono con lo stesso periodo nei due sistemi di riferimento

Ipotesi:

$$x' = a_{11}x + a_{14}t = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t = \gamma_1(t - \alpha x)$$

$$\begin{aligned}
 r'^2 &= \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma_1^2(t - \alpha x)^2 = \\
 &= \underbrace{\gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 xvt + \gamma^2 v^2 t^2 + y^2 + z^2}_{\substack{(\gamma^2 - c^2\gamma_1^2\alpha^2)x^2 - 2(\gamma^2 v - c^2\gamma_1^2\alpha)xt + y^2 + z^2 = \left(\gamma_1^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\right)c^2 t^2}} = c^2\gamma_1^2 t^2 - 2c^2\gamma_1^2 t\alpha x + c^2\gamma_1^2 \alpha^2 x^2
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\gamma^2 - c^2\gamma_1^2\alpha^2}_{=1} x^2 - \underbrace{2(\gamma^2 v - c^2\gamma_1^2\alpha)}_{=0} xt + \underbrace{y^2 + z^2}_{=1} = \underbrace{\left(\gamma_1^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\right)}_{=1} c^2 t^2$

$$\begin{cases} \gamma^2 - c^2\gamma_1^2\alpha^2 = 1 \\ \gamma^2 v - c^2\gamma_1^2\alpha = 0 \\ \gamma_1^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &\gamma^2 v - \alpha c^2 - \alpha \gamma^2 v^2 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\gamma^2 v}{c^2 + \gamma^2 v^2} \\ &\gamma_1^2 = 1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$\gamma^2 - c^2 \frac{\left(1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\right) \gamma^4 v^2}{(c^2 + \gamma^2 v^2)^2} = \gamma^2 - \frac{(c^2 + \gamma^2 v^2) \gamma^4 v^2}{(c^2 + \gamma^2 v^2)^2} = \gamma^2 - \frac{\gamma^4 v^2}{c^2 + \gamma^2 v^2} = 1$$

$$\gamma^2 c^2 + \gamma^4 v^2 - \gamma^4 v^2 = c^2 + \gamma^2 v^2 \Rightarrow \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma_1^2 = 1 + \frac{\frac{c^2}{c^2 - v^2} v^2}{c^2} = 1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma$$

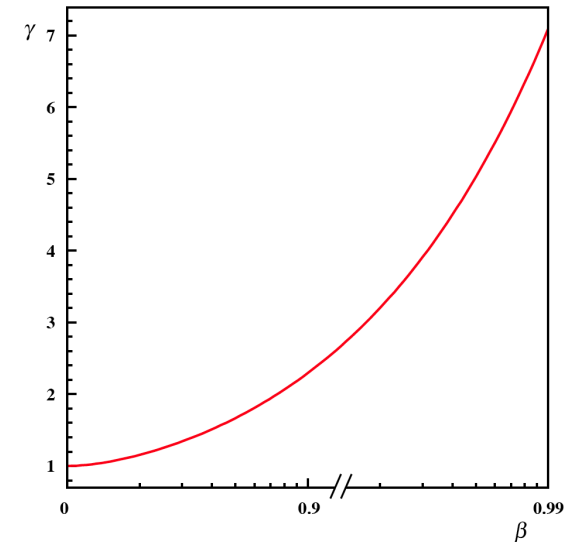
$$\alpha = \frac{\frac{c^2}{c^2 - v^2} v}{c^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2} v^2} = \frac{\frac{vc^2}{c^2 - v^2}}{\frac{c^4 - c^2 v^2 + c^2 v^2}{c^2 - v^2}} = \frac{vc^2}{c^4} \Rightarrow \alpha = \frac{v}{c^2}$$

Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni che lasciano invariata la velocità della luce sono le “trasformazioni di Lorentz”:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

con: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
 $\beta = \frac{v}{c}$



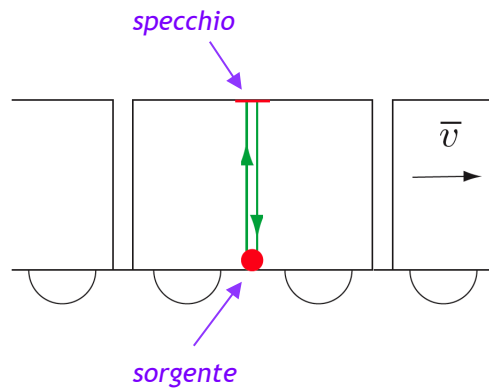
Nelle trasformazioni tra due sistemi inerziali non è quindi invariante la lunghezza spaziale ma la lunghezza spazio-temporale:

$$l^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

dove il vettore “posizione spazio-temporale” (**quadrivettore**) è definito dalle 4 coordinate:

$$(ix, iy, iz, ct)$$

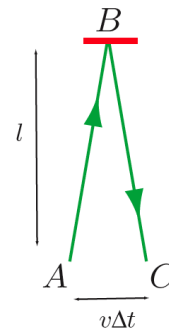
Dilatazione dei tempi



Tempo di andata e ritorno.

Osservatore solidale al treno: $\Delta t' = \frac{2l}{c}$

Osservatore fermo: $\Delta t = \frac{AB+BC}{c} = \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$



$$\frac{c^2(\Delta t)^2}{4} = l^2 + \frac{v^2(\Delta t)^2}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\frac{2l}{c}}{\frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

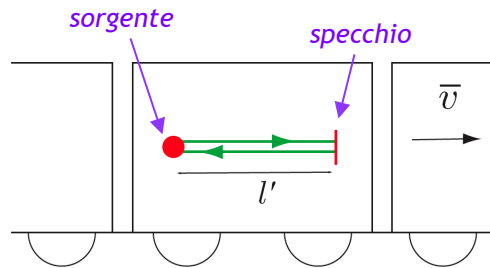
In un sistema in moto il tempo proprio rallenta

Nota.

Sulla base delle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'_1 - t'_0 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) - \gamma \left(t_0 - \frac{v}{c^2} x_0 \right) = \gamma \left[t_1 - t_0 - \frac{v}{c^2} (x_1 - x_0) \right] = \\ &= \gamma \left[t_1 - t_0 - \frac{v}{c^2} v(t_1 - t_0) \right] = \gamma \left(\Delta t - \frac{v^2}{c^2} \Delta t \right) = \\ &= \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

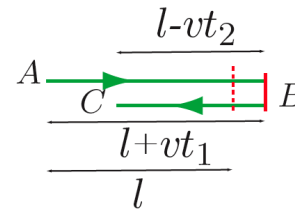
Contrazione delle lunghezze



Tempo di andata e ritorno.

Osservatore solidale al treno: $\Delta t' = \frac{2l'}{c}$

Osservatore fermo:



$$AB = ct_1 = l + vt_1$$

$$BC = ct_2 = l - vt_2$$

$\Downarrow$

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$$

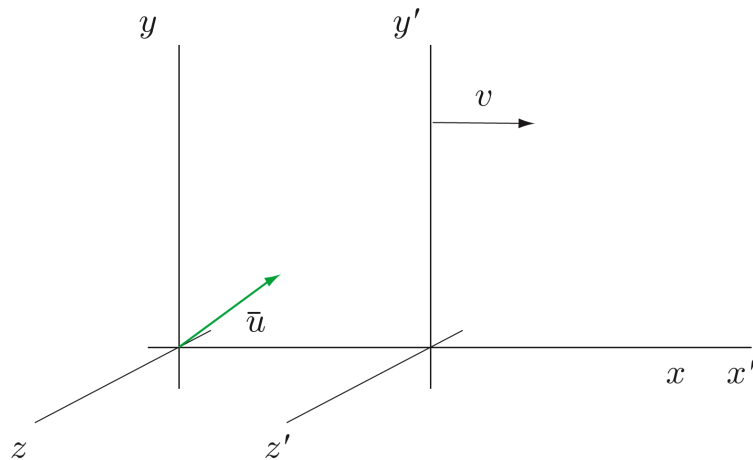
$\Downarrow$

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{2l'}{c} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{l'}{l} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

In un sistema in moto le lunghezze proprie si contraggono

Trasformazione delle velocità



Componente x: $x' = u'_x t' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

↓

$$x - vt = u'_x \left(t - \frac{v}{c^2}x \right)$$

↓

$$\Leftrightarrow x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} t$$

↓
 u_x

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$

↓

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Componente y: $\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = u'_y = \frac{\Delta y}{\frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\Delta y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} =$

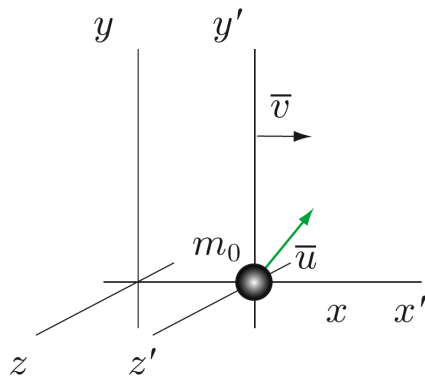
$$= \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Componente z:

$$u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Trasformazione delle quantità di moto



τ = tempo proprio del sistema che si muove a velocità u

t = tempo dell'osservatore (fermo nel sistema S)

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 τ t

$$\begin{aligned}
 p'_x &= m_0 \frac{dx'}{d\tau} = m_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \\
 &= m_0 \gamma \frac{d}{d\tau} (x - vt) = m_0 \gamma \left(\frac{dx}{d\tau} - v \frac{dt}{d\tau} \right) \\
 &= m_0 \gamma \left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} - v \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma (m_0 \gamma_u u_x - m_0 \gamma_u v) = \\
 &= \gamma (m u_x - m v) \\
 &= \gamma (p_x - m v)
 \end{aligned}$$

Un sistema che si muove aumenta la sua massa

Quantità di moto relativistica:

$$\bar{p} = \frac{m_0 \bar{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Energia cinetica relativistica

Energia cinetica = lavoro fornito ad un punto materiale di massa m , attraverso l'azione di una forza F applicata per un tempo t

$$\rightarrow K = \int_0^W dW$$



$$\begin{aligned} K &= \int_0^t \frac{dW}{dt} dt = \int_0^t c^2 \frac{dm}{dt} dt = \\ &= \int_{m_0}^m c^2 dm = c^2(m - m_0) \end{aligned}$$

$\downarrow$
 $m_0\gamma$

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

$$E_0 = m_0 c^2 \quad \text{energia del punto materiale a riposo}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{dm}{dv^2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dv^2} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{dv^2}{dt} = \\ &= \frac{m_0 \frac{1}{c^2} \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 \gamma}{\frac{1}{\gamma^2} 2c^2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{m_0 \gamma^3}{2c^2} \frac{dv^2}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{2c^2}{m_0 \gamma^3} \frac{dm}{dt}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} m \frac{2c^2}{\gamma^3 m_0} + v^2 \right) \frac{dm}{dt} &= \left(\frac{1}{2} m_0 \gamma \frac{2c^2}{\gamma^3 m_0} + v^2 \right) \frac{dm}{dt} = \\ &= \frac{c^2}{\gamma^2} + v^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + v^2 = c^2 \end{aligned}$$

Energia e quantità di moto

Per un punto materiale di massa m_0 che si muove a velocità v :

$$E = m_0 \gamma c^2$$

$$\bar{p} = m_0 \gamma \bar{v} = m_0 \gamma c \bar{\beta}$$

Così come spazio e tempo sono componenti di un quadrivettore “posizione”, energia e quantità di moto sono componenti di un quadrivettore “energia”:

$$\left(i \frac{p_x}{c}, i \frac{p_y}{c}, i \frac{p_z}{c}, \frac{E}{c^2} \right)$$

il cui modulo è l’invariante relativistico “massa a riposo”:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E^2}{c^4} - \frac{p_x^2}{c^2} - \frac{p_y^2}{c^2} - \frac{p_z^2}{c^2}} &= \sqrt{\frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m_0^2 \gamma^2 c^4}{c^4} - \frac{m_0^2 \gamma^2 c^2 \beta^2}{c^2}} = \\ &= \sqrt{m_0^2 \gamma^2 - m_0^2 \gamma^2 \beta^2} = \\ &= m_0 \gamma \sqrt{1 - \beta^2} = \\ &= m_0 \end{aligned}$$