Allometria
Applicazioni alle variazioni di taglia

Domande tipiche

Da considerazioni sull'effetto della grandezza relativa degli animali e sulla loro forza si può rispondere alle tipiche domande:

È più forte una formica che trasporta molte volte il proprio peso o un'elefante che trasporta una frazione del proprio peso?

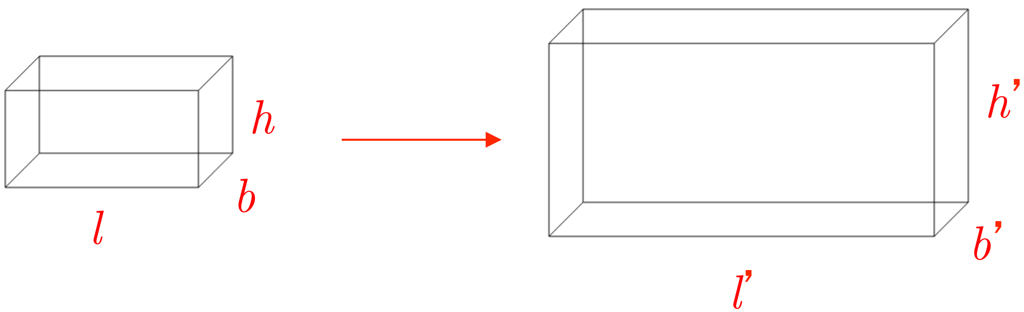
Salta più in alto una cavalletta o un uomo?

Un metodo obiettivo che si può utilizzare è legato alla scala degli animali.

Dimensione caratteristica

Ipotesi:

la struttura degli animali di dimensioni diverse è simile
➟ la "dimensione caratteristica" è una sola, le altre due scalano allo stesso modo.



$$h = k_1 l \qquad h' = k_1 l'$$
$$b = k_2 l \qquad b' = k_2 l'$$
$$V = k_1 k_2 l^3 \qquad V' = k_1 k_2 l'^3$$
$$V \propto l^3 \qquad V' \propto l'^3$$

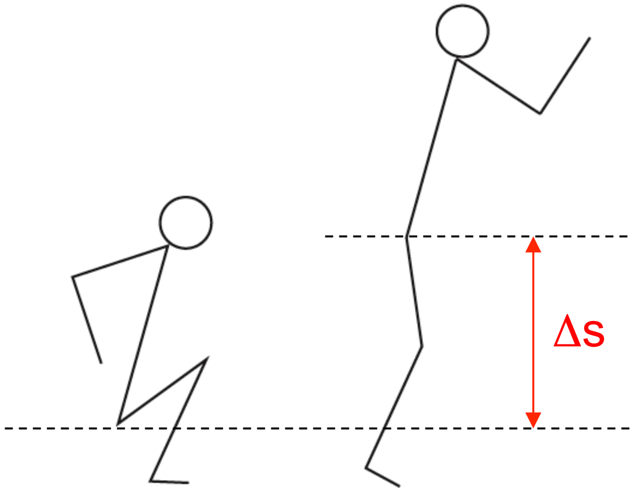
V è proporzionale alla "scala" l secondo lo stesso coefficiente nei due casi

la "dimensione caratteristica" è la lunghezza l *:*

$$V \propto l^3$$

$$m \propto V \propto l^3$$ *(la densità è la stessa per tutti gli animali)*

Salto



$$E_{TOT} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

dipende solo da v_0

$\Delta s \propto l$

$v_0 = \sqrt{2a\Delta s}$

$a = \dfrac{F}{m}$ → **Forza muscolare:**

$\propto$ numero di fibre

$\propto$ sezione del muscolo

$\propto$ l^2

$$a = \frac{F}{m} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}$$

$v_0 = \sqrt{2\dfrac{F}{m}\Delta s} \propto \sqrt{2l^{-1}l} \propto l^0$ = costante ➡

v_0 uguale per tutti gli animali

⬇

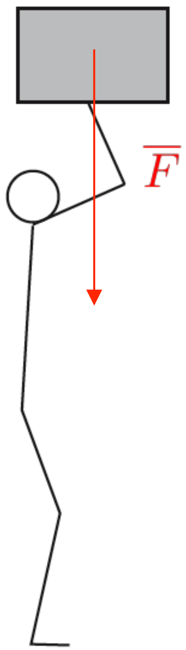
h uguale per tutti gli animali

h ~ 0.7 m entro un fattore 2

Cavalletta: h ~ 0.4 m, poco nonostante la struttura adatta al salto

gli insetti hanno muscoli poco efficienti

Trasporto



Il trasporto di massa avviene attraverso la forza muscolare:

$$F_{muscolare} = m_{trasportata}\, g \propto l^2 \Rightarrow m_{trasportata} \propto l^2$$

Il rapporto tra massa trasportata e massa corporea è quindi:

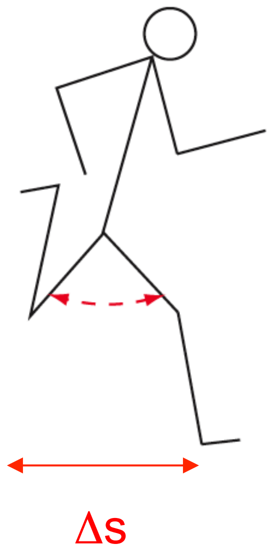
$$\frac{m_{\mathrm{trasportata}}}{m_{\mathrm{corporea}}} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}$$

uomo $\Rightarrow$ $\dfrac{m_{\mathrm{t}}}{m_{\mathrm{c}}} \sim 1$

insetto $\Rightarrow$ $\dfrac{\left(\frac{m_{\mathrm{t}}}{m_{\mathrm{c}}}\right)_{\mathrm{insetto}}}{\left(\frac{m_{\mathrm{t}}}{m_{\mathrm{c}}}\right)_{\mathrm{uomo}}} = \dfrac{l_{\mathrm{insetto}}^{-1}}{l_{\mathrm{uomo}}^{-1}} = \dfrac{l_{\mathrm{uomo}}}{l_{\mathrm{insetto}}} \sim 100$

in realtà $\Rightarrow$ $\dfrac{\left(\frac{m_{\mathrm{t}}}{m_{\mathrm{c}}}\right)_{\mathrm{insetto}}}{\left(\frac{m_{\mathrm{t}}}{m_{\mathrm{c}}}\right)_{\mathrm{uomo}}} < 100$ *perchè gli insetti hanno muscoli poco efficienti*

Corsa



Il lavoro dei muscoli durante la corsa consiste in:

- *accelerazione e decelerazione degli arti (movimento rotatorio)*
- *contrazione/estensione degli arti*

Forza muscolare ➟ $F_{muscolare} \propto l^2$

Lavoro ➟ $W = F_{muscolare}\,\Delta s \propto l^2\, l = l^3$

Energia cinetica degli arti ➟ $E = \frac{1}{2} I \omega^2 \propto l^5 v^2 l^{-2} = v^2 l^3$

$\omega = \frac{v}{l_{\text{gamba}}} \propto v l^{-1}$

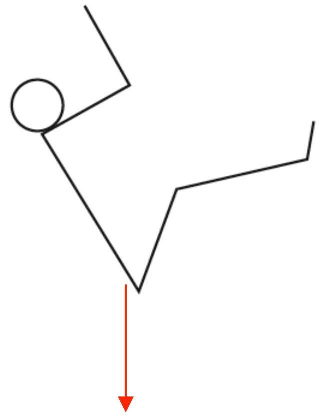
$I \propto m r^2 \propto l^3 l^2 = l^5$

Lavoro= Energia cinetica degli arti ➟ $l^3 = v^2\, l^3$ ➟ $\boxed{v = \textit{costante} \simeq 10\text{-}20\ m/s}$

Nota: gli animali predisposti alla corsa hanno una coscia muscolosa e un garretto sottile per minimizzare il momento d'inerzia della gamba.

Caduta

La velocità limite di caduta dipende dall'attrito. Supponendo la caduta abbastanza veloce perchè valga la legge di resistenza newtoniana:



$$F_{\text{attrito}} = \frac{1}{2} C_R \rho_{\text{aria}} v^2 A$$

La situazione di equilibrio si ottiene quando la forza di attrito si oppone esattamente alla forza peso (trascurando la forza di Archimede):

$$v_{\max} \Rightarrow F_g = F_{\text{attrito}} \Rightarrow mg = \frac{1}{2} C_R \rho_{\text{aria}} v^2 A \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2\overset{\propto\, l^3}{m}g}{C_R \rho_{\text{aria}} \underset{\propto\, l^2}{A}}}$$

$$\boxed{v_{\max} \propto \sqrt{l}}$$

Gli animali piccoli hanno velocità limite più basse e quindi possono cadere da un'altezza maggiore con gli stessi danni.

Esempio: salto rigido

forza di rottura della tibia: $F \sim 50000\ N$
accorciamento elastico massimo: $\Delta s \sim 1\ cm$

$$F_{\max} = m a_{\max} = 2 \times 50000 = 10^5\,\mathrm{N} \ \Rightarrow\ a_{\max} = \frac{10^5}{75} = 1333\,\mathrm{m/s^2}$$

$$v_{\max} = \sqrt{2 a_{\max} \Delta s} = 5.2\,\mathrm{m/s}$$

$$h_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g} = 1.4\,\mathrm{m}$$

Esempio: salto attutito

forza di rottura dei tendini: $F \sim$ 5% tibia $\sim 2500\ N$
molleggio sulle gambe: $\Delta s \sim 60\ cm$

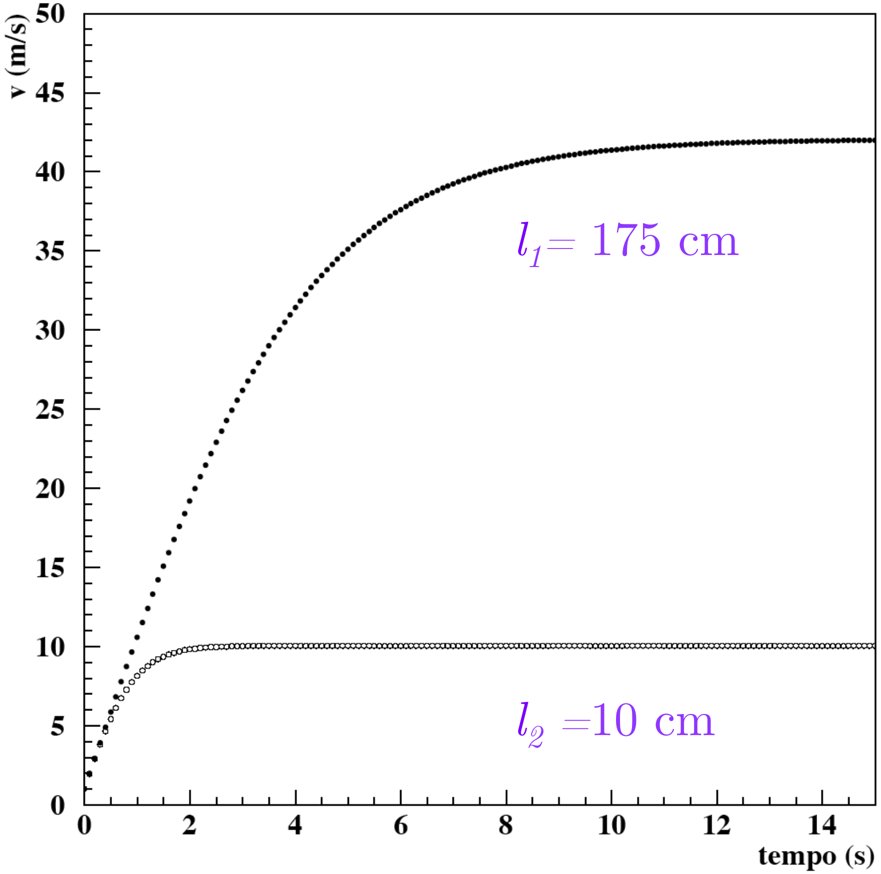
$$F_{\max} = m a_{\max} = 2 \times 2500 = 5000\,\mathrm{N} \ \Rightarrow\ a_{\max} = \frac{5000}{75} = 67\,\mathrm{m/s^2}$$

$$v_{\max} = \sqrt{2 a_{\max} \Delta s} = 8.9\,\mathrm{m/s}$$

$$h_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g} = 4\,\mathrm{m}$$

Confronto $l_1 = 175$ cm con $l_2 = 10$ cm: $m_1 = 75$ kg, $m_2 = 13$ g; $A_1 = 1.6\ \mathrm{m}^2$, $A_2 = 52\ \mathrm{cm}^2$.

$C_R = 0.4$
$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$
$\varrho_{aria} = 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$



$\longrightarrow v_{\max} = 42\ \mathrm{m/s}$

$\longrightarrow v_{\max} = 10\ \mathrm{m/s}$ *al limite per una caduta attutita senza danni*

Diametro ossa

La forza di gravità deve essere bilanciata dalla forza (vincolare) dello scheletro:

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{scheletro}} \propto \text{superficie ossa} \propto r^2_{\text{ossa}} \\ F_g = mg \propto l^3 \end{array}\right\} \quad r^2_{\text{ossa}} \propto l^3 \;\Rightarrow\; \boxed{r_{\text{ossa}} \propto \sqrt{l^3} = l^{1.5}}$$

Esempio:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{elefante: } l \sim 5\text{ m} \\ \textit{capriolo: } l \sim 1\text{ m} \end{array}\right\} \quad \frac{r_{\text{ossa elef.}}}{r_{\text{ossa capr.}}} = \left(\frac{l_e}{l_c}\right)^{1.5} \simeq 11$$

(sperimentalmente ~ 9)

Circolazione sanguigna

Da un punto di vista termodinamico, scopo del sangue è trasportare alla superficie il calore prodotto all'interno del corpo:

dispersione calore $\propto$ superficie corporea $\propto l^2$ ➟ fabbisogno di sangue $\propto l^2$

$$\text{frequenza cardiaca} = \frac{\text{fabbisogno di sangue}}{\text{volume cuore}} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}$$

i bambini hanno una frequenza cardiaca maggiore degli adulti

Metabolismo

La dispersione di calore è una misura del metabolismo, che è quindi proporzionale alla superficie del corpo ($\propto l^2$).

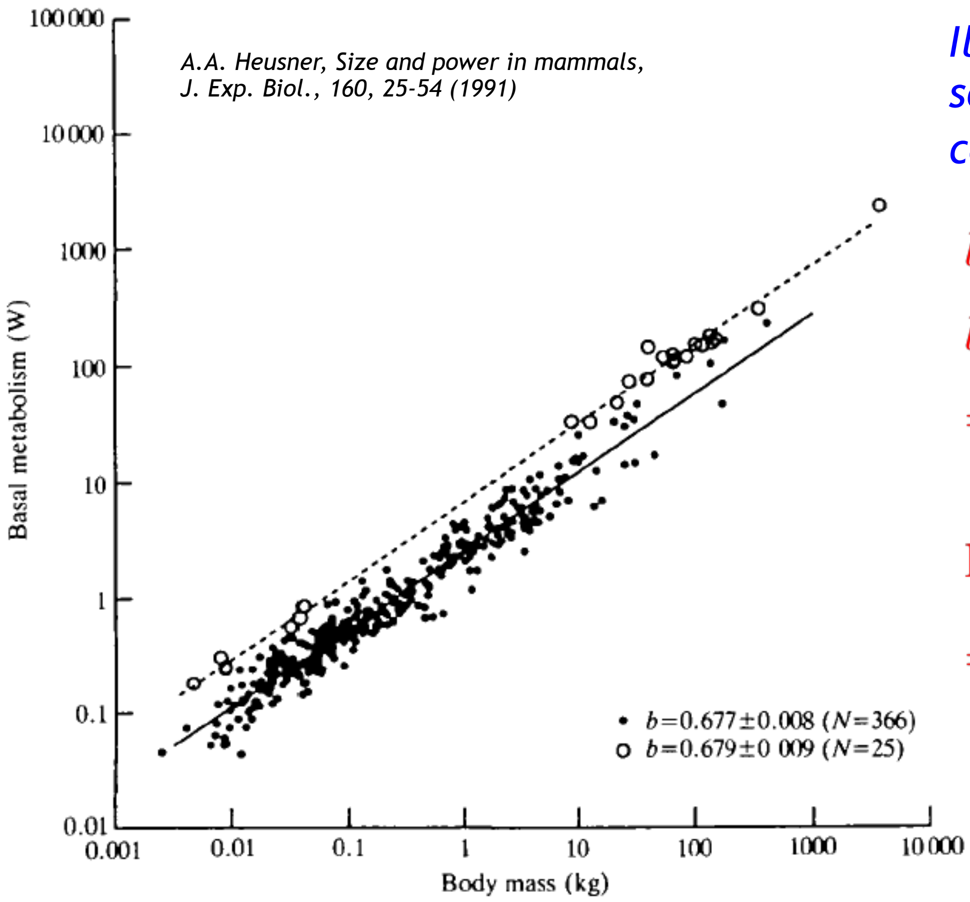


Fig. 2. Regression lines between the logarithms of basal metabolism and body mass in 391 mammalian species. The open symbols and dotted line show observations from the 25 positive 'outliers'. See text for further details.

Il plot metabolismo vs. massa del corpo in scala bilogaritmica è una retta con coefficiente angolare 2/3 = 0.667:

$$l \propto (\text{metabolismo})^{\frac{1}{2}}$$

$$l \propto (\text{massa})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{metabolismo} = C\ (\text{massa})^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_{10}(\text{metabolismo}) = \log_{10}[C\ (\text{massa})^{\frac{2}{3}}]$$

$$= \log_{10}(C) + \frac{2}{3}\log_{10}(\text{massa})$$

Fabbisogno di cibo

Il cibo serve a compensare l'energia persa per dissipazione del calore dalla superficie del corpo. Il fabbisogno di cibo è quindi un'altra misura del metabolismo, ed è anch'esso proporzionale alla superficie del corpo ($\propto l^2$):

$$\frac{m_{\text{cibo}}}{m} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}$$

Esempio:

uomo: $l \sim$ 1.7 m, $m \sim$ 75 kg ➟ 1.5 kg *di cibo al giorno* = 2% *del proprio peso*
topo: $l \sim$ 10 cm, $m \sim$ 13 g ➟ 17x2%=34% *del proprio peso* (4.5 g *di cibo al giorno)*
$l \sim$ 2 cm ➟ 85x2%=170% *del proprio peso* => *troppo!*
non esistono animali omeotermi al di sotto di una certa dimensione (pochi cm)

Durata di vita

Sperimentalmente : *il numero totale di battiti cardiaci nel corso della vita di tutti gli animali è costante (~ 6 x 10^8)*

(durata di vita) x (frequenza cardiaca) = (numero totale di battiti cardiaci)

⬇

$$\text{durata di vita} = \frac{\text{costante}}{\text{frequenza cardiaca}} \propto \frac{1}{l^{-1}} = l$$

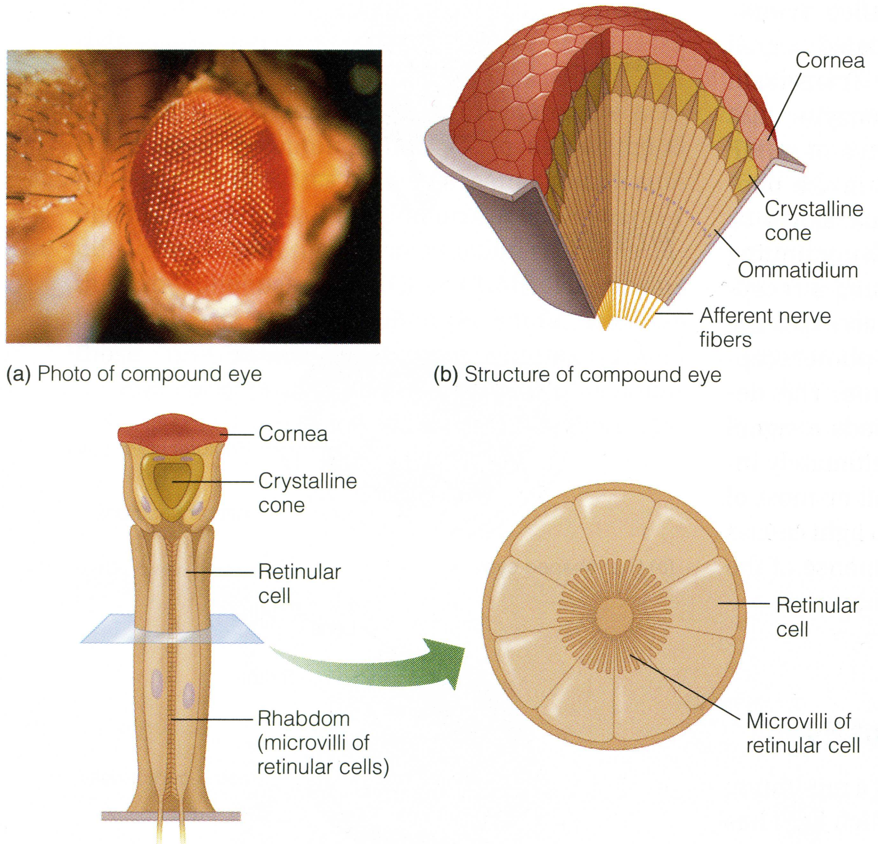
L'uomo è fuori curva: 70 anni invece che 30 ➡ *assistenza medica?*
qualità della vita?
intelligenza?

Nota.
Motore di automobile: vita media 150000 km a 2000 giri/min ➟ 3x10^8 giri totali
legge universale?

Riassunto

altezza di salto	costante
$m_{trasportata}/m$	$\propto l^{-1}$
velocità di corsa	costante
velocità di caduta	$\propto l^{0.5}$
diamtro ossa	$\propto l^{1.5}$
frequenza cardiaca	$\propto l^{-1}$
m_{cibo}/m	$\propto l^{-1}$
durata della vita	$\propto l$

Altre applicazioni della fisica alla biologia (occhio)



(a) Photo of compound eye (b) Structure of compound eye

(c) Structure of an ommatidium (d) Cross-section through an ommatidium

Figure 7.34 Structure of an insect compound eye and ommatidium.
(a) The compound eye of *Drosophila melanogaster.* **(b)** A compound eye is composed of a cornea and many ommatidia. **(c)** Each ommatidium consists of a cornea, a crystalline cone, and several rhabdomeric photoreceptors called retinular cells. **(d)** The retinular cells are arranged radially, with their microvilli pointing inward to form a structure called the rhabdom.

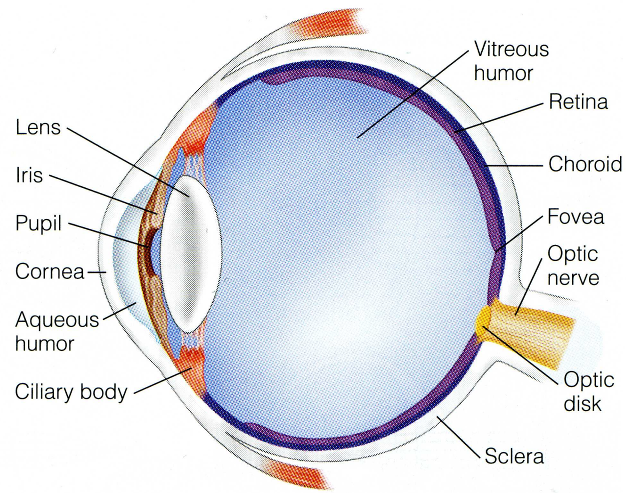


Figure 7.35 Structure of a mammalian eye.
Light entering the eye passes through the cornea, the aqueous humor, the pupil, the lens, and the vitreous humor before striking the retina.

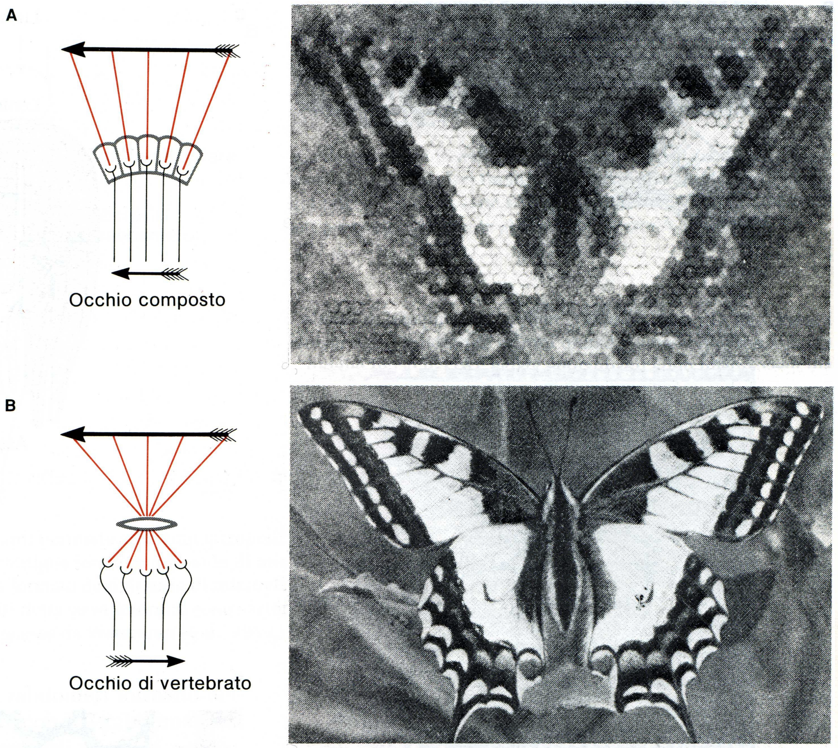


Figura 7.42 Gli occhi composti producono immagini a mosaico. (**A**) In un occhio composto ogni ommatidio, attraverso una sua lente, rileva una parte diversa del campo visivo. La fotografia a destra mostra l'immagine a mosaico di una farfalla, così come verrebbe percepita da una libellula ad una distanza di 10 cm. (**B**) Nell'occhio semplice, ogni recettore analizza una parte del campo visivo messa a fuoco da una lente, comune a tutti i recettori. La fotografia a destra mostra l'immagine della stessa farfalla così come verrebbe percepita dall'occhio semplice di un vertebrato. Le frecce mostrano il sistema ottico dell'occhio dei vertebrati che produce una immagine invertita sulla retina, mentre ciò non avviene nell'occhio composto. [Adattata da Kirschfeld, 1971, e Mazokhin-Porshnyakov, 1969.]