Elettromagnetismo
Formulazione differenziale

1. Legge di Gauss
2. Legge di Ampere
3. Equazioni di Maxwell statiche

Legge di Gauss

Campo elettrico

Carica contenuta all'interno della superficie A

$$\phi = \oint_A \overline{E} \cdot \overline{dA} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Flusso di campo elettrico uscente dalla superficie A

Integrale sulla superficie chiusa A

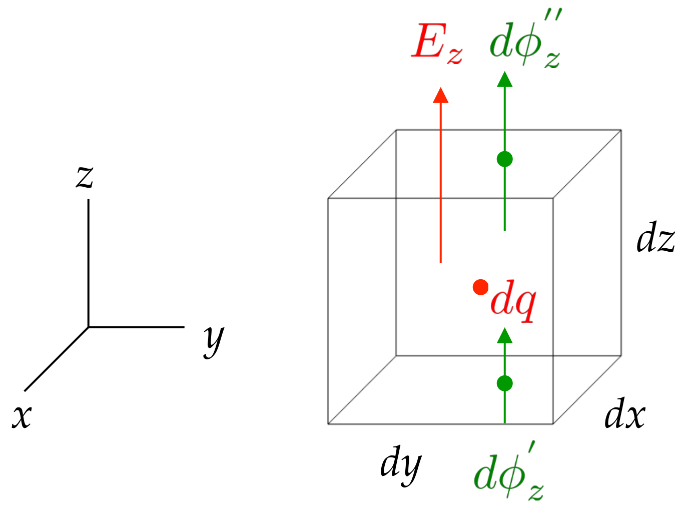
Elemento infinitesimo di superficie

Costante dielettrica del vuoto

Da un punto di vista fisico, il significato è:

- *le linee di forza iniziano o terminano solo in corrispondenza di cariche elettriche*
- *la carica elettrica si conserva*
- *le linee di forza si conservano*
- *l'intensità della forza elettrostatica dipende dal quadrato della distanza dalla carica che la produce*

Volume infinitesimo



Volume infinitesimo: $dV = dxdydz$

Carica contenuta in dV : dq

Componente z del campo elettrico: E_z

Flusso attraverso la faccia inferiore:

$$d\phi_z' = -E_z\left(x, y, z - \frac{1}{2}dz\right) dxdy$$

negativo perchè entrante

componente z di E sulla faccia inferiore

superficie della faccia inferiore

Flusso attraverso la faccia superiore:

$$d\phi_z'' = E_z\left(x, y, z + \frac{1}{2}dz\right) dxdy$$

Flusso totale:

$$\begin{aligned} d\phi_z &= d\phi_z'' + d\phi_z' = \left[E_z\left(x, y, z + \frac{1}{2}dz\right) - E_z\left(x, y, z - \frac{1}{2}dz\right)\right] dxdy = \\ &= \left[\left(\frac{dE_z}{dz}\right)_{\text{x,y costanti}} dz\right] dxdy = \frac{\partial E_z}{\partial z} dzdxdy = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo per le altre componenti (e le altre coppie di superfici):

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV$$

$$= \oint_{A_{dV}} \overline{E} \cdot \overline{dA} = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

superficie che delimita il volume dV

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{dq}{dV} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

densità di carica nel punto (x,y,z)

Da un punto di vista matematico:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

operatore nabla (analogo ad un vettore)

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}\right) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned}}$$

divergenza del vettore campo elettrico

Teorema di Gauss

Sommando su tutti i volumetti:

$$\oint_{A_{dV}} \overline{E} \cdot \overline{dA} = (\nabla \cdot \overline{E})\, dV$$

superficie che
delimita il
volume dV

$$\boxed{\oint_A \overline{E} \cdot \overline{dA} = \int_V (\nabla \cdot \overline{E})\, dV}$$

integrale su una
superficie chiusa A

integrale sul volume
racchiuso dalla
superficie A

Forma differenziale della legge di Gauss

$$\nabla \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Relazione tra campo e potenziale elettrico

Per una forza conservativa:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \longrightarrow$$

(energia) potenziale dovuto alla forza F

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Per il campo elettrico (potenziale V):

$$\overline{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -\nabla V$$

$$\boxed{\nabla V \text{ = gradiente dello scalare } V}$$

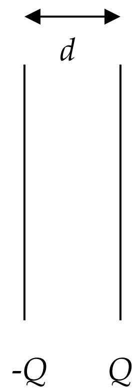
Operatore di Laplace

$$\nabla \cdot \overline{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Operatore di Laplace: $\boxed{\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$

Da un punto di vista operativo, data una certa distribuzione di densità di carica che definisce le condizioni al contorno, si integra due volte il laplaciano del potenziale per calcolare il potenziale e poi si deriva quest'ultimo per calcolare le tre componenti del campo elettrico.

Esempio: condensatore a piastre infinite.



Nella regione tra le piastre:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \Rightarrow V(x) = C_1 + C_2 x$$

perchè la densità di carica è zero

$$\left.\begin{aligned} V(0) &= V_0 \Rightarrow C_1 = V_0 \\ V(d) &= 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{V_0}{d} \end{aligned}\right\} \text{condizioni al contorno}$$

$$V(x) = V_0 - \frac{V_0}{d} x$$

$$E_x = E = -\frac{dV}{dx} = \frac{V_0}{d}$$

Legge di Gauss per il campo magnetico

Poichè non esistono cariche magnetiche isolate:

$$\oint_A \overline{B} \cdot \overline{dA} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{B} = 0}$$

Legge di Ampere

Campo di induzione magnetica

Corrente totale che attraversa una qualsiasi superficie delimitata da C

$$\oint_C \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 I$$

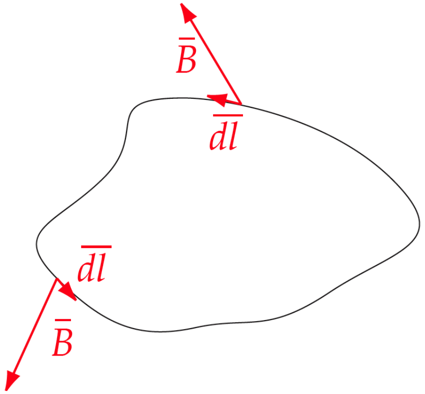
Integrale sul percorso chiuso C

Elemento infinitesimo di percorso

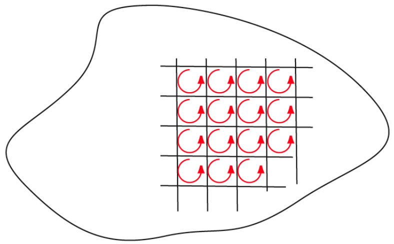
Permeabilità magnetica del vuoto

Il campo di induzione magnetica è generato da una corrente elettrica. Le linee di forza del campo sono chiuse su se stesse e circondano la corrente.

Superficie infinitesima



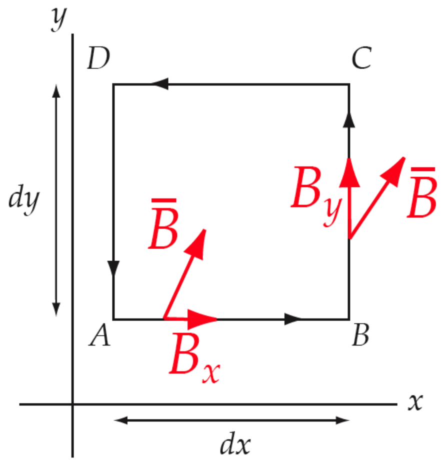
Se si suddivide la superficie in tanti quadratini di grandezza infinitesima:



Integrale lungo la linea chiusa:

$$= \oint_C \overline{B} \cdot \overline{dl}$$

integrale lungo la linea chiusa = somma degli integrali sui perimetri di ciascun quadratino



dx e dy piccoli (infinitesimi) ➟ il vettore B non cambia molto lungo il lato del quadrato: $B_x^{(CD)} = B_x^{(AB)} + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy$

variazione dal lato AB al lato CD (in direzione y)

$$\oint_{ABCD} \overline{B} \cdot \overline{dl} = B_x^{(AB)} dx + B_y^{(BC)} dy - B_x^{(CD)} dx - B_y^{(DA)} dy =$$

$$= \left[B_x^{(AB)} - B_x^{(CD)} \right] dx + \left[B_y^{(BC)} - B_y^{(DA)} \right] dy$$

Quindi:

$$\left. \begin{aligned} \left[B_x^{(AB)} - B_x^{(CD)} \right] dx &= -\frac{\partial B_x}{\partial y} dx dy \\ \left[B_y^{(BC)} - B_y^{(DA)} \right] dy &= -\frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} \oint_{ABCD} \overline{B} \cdot \overline{dl} &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

area del quadratino

Rotore del campo magnetico

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \overline{B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) \\
&= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{k}
\end{aligned}
$$

rotore del vettore campo magnetico

$$
\oint_{ABCD} \overline{B} \cdot \overline{dl} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) dA = \left(\nabla \times \overline{B}\right)_z dA = \left(\nabla \times \overline{B}\right) \cdot \overline{dA} = \mu_0 dI
$$

corrente che fluisce attraverso la superficie da

Ma: $dI = \overline{J} \cdot \overline{dA}$ *quindi:* $\boxed{\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J}}$

densità di corrente nel punto (x,y,z)

Teorema di Stokes

Sommando su tutti i quadratini:

$$\oint_{ABCD} \overline{B} \cdot \overline{dl} = (\nabla \times \overline{B}) \cdot \overline{dA}$$

$$\boxed{\oint_C \overline{B} \cdot \overline{dl} = \int_A (\nabla \times \overline{B}) \cdot \overline{dA}}$$

integrale su un percorso chiuso C

integrale su una qualsiasi superficie A delimitata dal percorso chiuso C

Forma differenziale della legge di Ampere

$$\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J}$$

Legge di Ampere per il campo elettrostatico

Poichè il campo elettrostatico è conservativo:

$$\oint_C \overline{E} \cdot \overline{dl} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla \times \overline{E} = 0}$$

Riassumendo ...

Nel caso statico:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dB}{dt} = 0, \; \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &\nabla \cdot \overline{B} = 0 \\ &\nabla \times \overline{E} = 0 \\ &\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J} \end{aligned}}$$