# Elettromagnetismo
# Formulazione differenziale

1. Legge di Faraday
2. Estensione della legge di Ampere
3. Equazioni di Maxwell
4. Onde elettromagnetiche

# Legge di Faraday

Campo elettrico

Campo di induzione magnetica

Flusso di campo di induzione magnetica attraverso la superficie A

$$\mathcal{E} = \oint_C \overline{E} \cdot \overline{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \overline{B} \cdot \overline{dA} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Forza elettromotrice indotta (dimensional-mente è un'energia)

Integrale lungo la curva chiusa C

Elemento di percorso

Integrale sulla superficie A delimitata da C

Elemento di superficie

*La variazione nel tempo del flusso del campo di induzione magnetica attraverso una superficie genera un campo elettrico le cui linee di forza sono chiuse su se stesse e circondano la variazione di campo di induzione magnetica.*

# Forma differenziale della legge di Faraday

*Facendo uso del teorema di Stokes:*

$$\oint_C \overline{E} \cdot \overline{dl} = \int_A (\nabla \times \overline{E}) \cdot \overline{dA} = -\int_A \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot \overline{dA}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}}$$

# *La legge di Ampere statica*

*La legge di Ampere:* $\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J}$ *vale solo in condizioni stazionarie, cioè quando:*

*Densità di corrente*

*Corrente elettrica*

*Carica elettrica contenuta in A*

*Densità di carica*

$$\oint_A \overline{J} \cdot \overline{dA} = I = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0$$

*Integrale sulla superficie chiusa A*

*Negativo perchè un flusso di corrente uscente da V implica una diminuzione della carica al suo interno*

*Integrale sul volume V delimitato da A*

*Condizione statica: la quantità di carica contenuta nel volume V delimitato dalla superficie A non cambia nel tempo. In altri termini, la corrente che fluisce dentro il volume è uguale alla corrente che ne esce (il flusso netto di corrente nel volume V è nullo).*

# *Estensione a condizioni non stazionarie*

*In condizioni non stazionarie:*

$$\oint_A \overline{J} \cdot \overline{dA} = \int_V \left(\nabla \cdot \overline{J}\right) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \neq 0$$

*Teorema di Gauss*

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \overline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

*Ma* $\nabla \cdot \left(\nabla \times \overline{B}\right) = 0$ *sempre:*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \overline{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{k}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

*uguali per la definizione di derivate parziali*

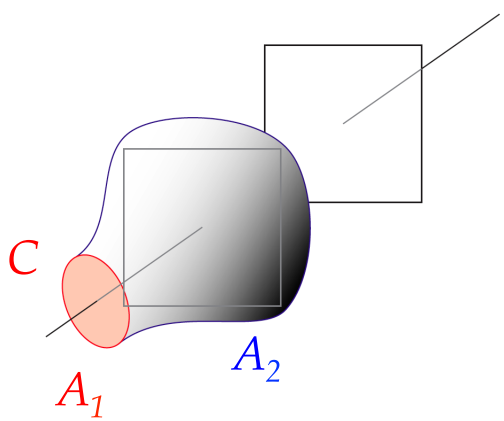
*Quindi:* $\nabla \cdot \left(\nabla \times \overline{B}\right) = \mu_0 \nabla \cdot \overline{J} = 0$ $\Rightarrow$ *contraddizione!*

Dal Teorema di Stokes applicato alla legge di Ampere, si è visto che:

$$\oint_C \overline{B} \cdot \overline{dl} = \int_A (\nabla \times \overline{B}) \cdot \overline{dA} = \int_A \mu_0 \overline{J} \cdot \overline{dA}$$

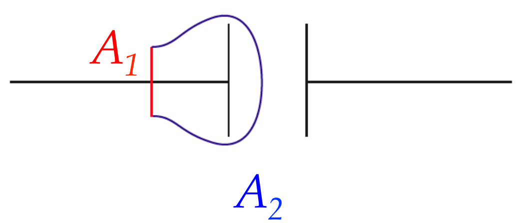
In condizioni non stazionarie, l'integrale dipende dalla superficie A scelta.

Esempio: scarica di un condensatore.




La curva C delimita due superfici possibili:

- $A_1$ interseca il filo ➟ c'è densità di corrente, variabile nel tempo, che fluisce attraverso di essa
- $A_2$ passa tra le placche del condensatore ➟ non c'è densità di corrente che fluisce attraverso di essa



# matematica ...

*Da un punto di vista puramente matematico, dobbiamo trovare un vettore* $\overline{J'}$ *tale che sia sempre:*

$$\nabla \cdot \overline{J'} = 0$$

*Inoltre, in condizioni stazionarie deve essere:* $\overline{J'} = \overline{J}$

*Ipotesi:* $\overline{J'} = \overline{J} + \overline{J_D}$ *con:* $\overline{J_D} = \epsilon_0 \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t}$

*Legge di Gauss*

$$\nabla \cdot \overline{J_D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \left( \nabla \cdot \overline{E} \right)}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \frac{\rho}{\epsilon_0}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

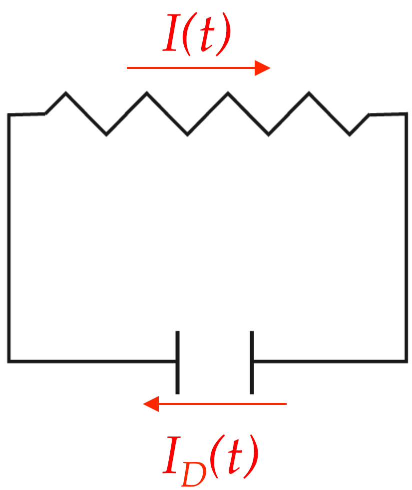
$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot (\overline{J} + \overline{J_D}) = \nabla \cdot \overline{J} + \nabla \cdot \overline{J_D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

*Il termine* $\overline{J_D} = \epsilon_0 \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ *è quello che deve essere aggiunto alla parte destra della legge di Ampere per far sì che l'integrale non dipenda dalla scelta della superficie su cui integrare.*

# Il condensatore che si scarica

Quando il condensatore si scarica, nel circuito fluisce una corrente $I_{tot}(t)=I(t)+I_D(t)$, dove $I(t)$ è la corrente di conduzione (cioè il flusso di cariche nei conduttori) e $I_D(t)$ rappresenta la corrente di spostamento, che "chiude" il circuito. È questa corrente di spostamento che intercetta la superficie che passa tra le placche del condensatore e produce un campo di induzione magnetica.




Nota: Maxwell introdusse il concetto di corrente di spostamento esattamente nel modo descritto, cioè a partire da considerazioni puramente matematiche.

# Equazioni di Maxwell

*Riassumendo, nel caso generale non stazionario si ha:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &\nabla \cdot \overline{B} = 0 \\ &\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

*Equazioni di Maxwell*

# e luce fu ...

*Perchè?*

*Nel vuoto (in assenza di cariche e correnti) le equazioni sono simmetriche e implicano che un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico anche in assenza di correnti elettriche*
*e che*
*un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico anche in assenza di cariche*

$$\nabla \cdot \overline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \overline{B} = 0$$

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$

*In altri termini:*
*campi elettrici e magnetici variabili possono autosostenersi e propagarsi nello spazio anche quando le cariche e le correnti che li hanno generati non esistono più*

⬇

*predominanza del concetto di campo rispetto al concetto di forza*

# Esempio

*Ipotesi:*

$$\overline{E} = \overline{E}(z,t) = E_x\hat{i}$$

$$\overline{B} = \overline{B}(z,t)$$

$$\nabla \cdot \overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$ *perchè $E_x$ dipende solo da $z$*

$$\nabla \times \overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial t}}_{=0}\hat{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{j} - \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial t}}_{=0}\hat{k}$$

*$B_x$ e $B_z$ costanti, $B_y$ variabile nel tempo*

$$\nabla \cdot \overline{B} = \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

*perchè $B$ dipende solo da $z$*

*$B_z$ costante*

*Trascurando i campi costanti:*

$$\overline{B} = B_y\hat{j}$$

$$\nabla \times \overline{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{i} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{i}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}}$$

*Derivando successivamente:*

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

*$E_x$ e $B_y$ soddisfano alle equazioni delle onde con:*

$$\boxed{v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = (2,997924574 \pm 0,000000012) \times 10^8 \, \mathrm{m/s}}$$

*si indica con $c$ la velocità della luce nel vuoto*

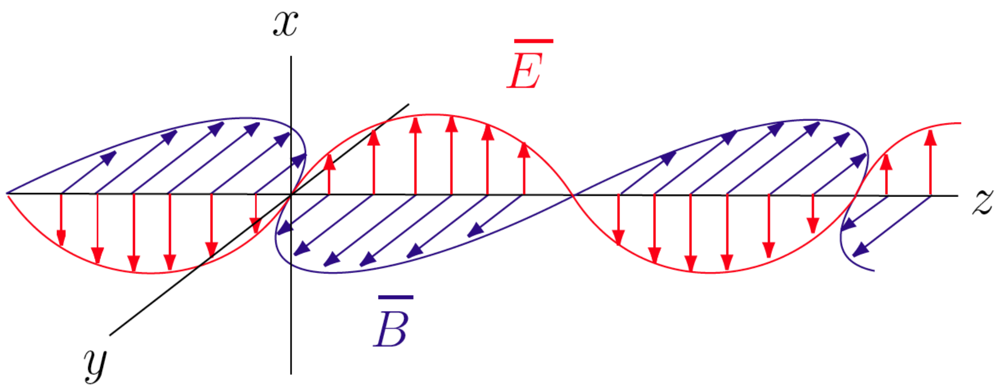
*Maxwell si rese conto che la velocità delle onde elettromagnetiche era uguale a quella (misurata) della luce e quindi ipotizzò che la luce fosse un'onda elettromagnetica.*

Se:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - kz) \\ B_y &= B_0 \cos(\omega t - kz) \end{aligned}\right\}$$

*Treno infinito di onde sinusoidali trasversali (onda elettromagnetica polarizzata)*

*perchè i campi mantengono sempre la stessa direzione nello spazio*




Da: $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}$ e $u = \omega t - kz$ :

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial u} = -\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial B_y}{\partial u}$$

$$-k\frac{\partial E_x}{\partial u} = -\omega\frac{\partial B_y}{\partial u}$$

$$-\frac{\omega}{c}\frac{\partial E_x}{\partial u} = -\omega\frac{\partial B_y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial u} = \frac{\partial c B_y}{\partial u} \Rightarrow \boxed{E_x = cB_y}$$

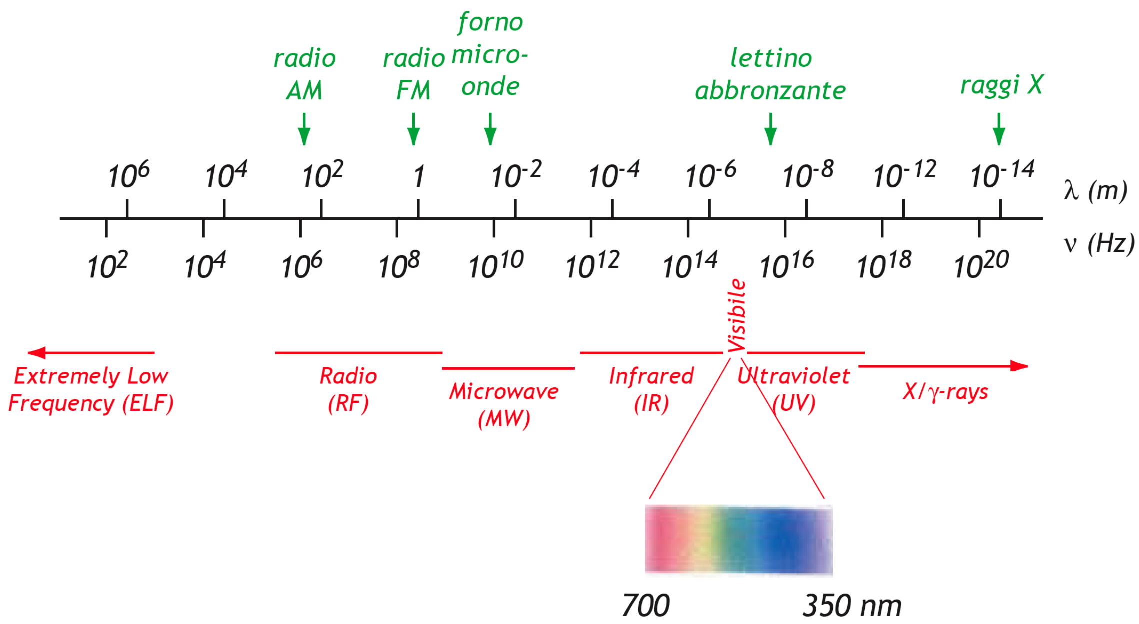
# Note sulle onde elettromagnetiche

Due problemi che hanno occupato i fisici per piu di quarant'anni:

le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto, cioè non hanno, apparentemente, bisogno di un mezzo materiale

la velocità delle onde elettromagnetiche deriva direttamente dalle equazioni di Maxwell, quindi le equazioni di Maxwell non mantengono la forma per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali

Spettro delle onde elettromagnetiche:



# Onde in mezzi dielettrici

*Un'onda che si propaga in un mezzo dielettrico isotropo avrà una velocità:*

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$$

*perchè $\mu \simeq \mu_0$ per la maggior parte dei mezzi trasparenti*

*costante dielettrica del mezzo*

$$\boxed{n = \frac{c}{c'} \text{ indice di rifrazione del mezzo}}$$

*In un dielettrico:* resta costante $\omega$

aumenta $k' = \dfrac{\omega}{c'} = \dfrac{n\omega}{c}$

diminuisce $\lambda' = \dfrac{\lambda}{n}$