

Energia del campo elettromagnetico

- 1. Energia*
- 2. Quantità di moto*
- 3. Radiazione di dipolo*

Energia

Come le onde meccaniche, anche le onde elettromagnetiche trasportano energia, anche se non si propagano muovendosi in un mezzo materiale.

Consideriamo un'onda che si propaga nel vuoto:

$$E = cB = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} B \Rightarrow E^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} B^2 \Rightarrow \overset{8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}}{\epsilon_0} E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 = \overset{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}}{\mu_0} H^2$$

$H = \frac{B}{\mu_0}$

Dimensionalmente:

$$[\epsilon_0] = \left[\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right]; [\mu_0] = \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]; [E] = \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]; [H] = \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} [\epsilon_0 E^2] &= \left[\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \frac{\text{N}^2}{\text{C}^2} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] \\ [\mu_0 H^2] &= \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \frac{\text{A}^2}{\text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned} \right\} \text{densità di energia}$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{\Delta U_E + \Delta U_M}{\Delta V} = u = \underbrace{\frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)}_{\text{equamente ripartita tra E e H}} \quad \text{densità di energia trasportata dall'onda}$$

Equazione di continuità

Anche per l'energia vale l'equazione di continuità (già incontrata per cariche e correnti):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = - \oint_A \bar{S} \cdot \overline{dA} = - \int_V (\nabla \cdot \bar{S}) dV$$

variazione nel tempo dell'energia all'interno del volume V
 perchè il flusso è uscente
 flusso di energia per unità di superficie per secondo uscente dal volume V
 teorema di Gauss



$$\nabla \cdot \bar{S} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$[S] = \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \right] = \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

Vettore di Pointing

In funzione dei campi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} = \\
 &\quad \xrightarrow{\quad \quad \quad} \frac{\partial A^2}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{A} \cdot \bar{A})}{\partial t} = 2\bar{A} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \\
 &= \epsilon_0 \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_0 \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\
 &= \underbrace{\frac{\nabla \times \bar{B}}{\mu_0 \epsilon_0}}_{\text{legge di Ampere}} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_0 \bar{H} \cdot \underbrace{\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}}_{= -\frac{\nabla \times \bar{E}}{\mu_0} \text{ legge di Faraday}} = \\
 &= \bar{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\bar{B}}{\mu_0} \right) - \bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{E}) = \\
 &= \bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{H}) - \bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{E}) = \\
 &= -\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H})
 \end{aligned}$$



$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$$

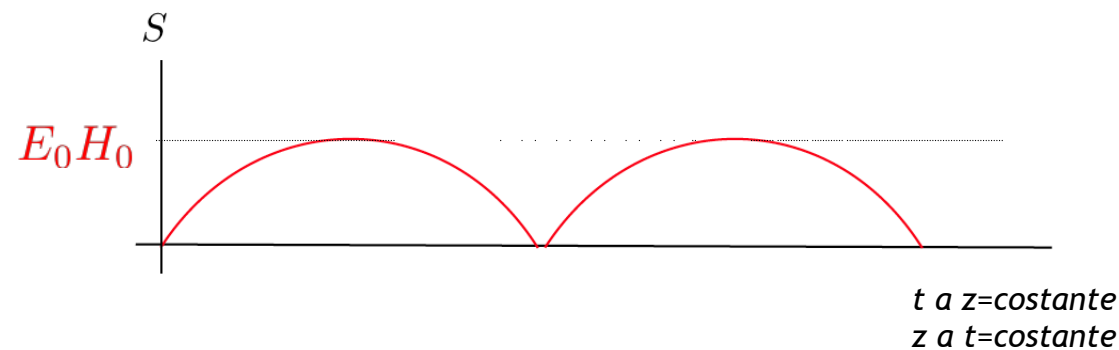
Onde sinusoidali

$$\overline{E} = E_x \hat{i} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{i}$$

$$\overline{H} = H_y \hat{j} = H_0 \cos(\omega t - kz) \hat{j}$$

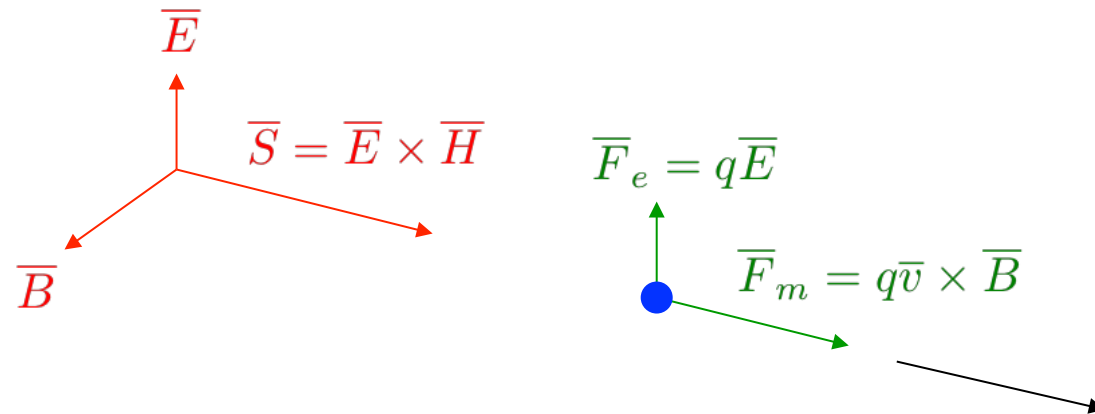
$$\overline{S} = E_x H_y (\hat{i} \times \hat{j}) = E_x H_y \hat{k} = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kz) \hat{k}$$

L'energia si propaga nella direzione dell'onda ed è sempre positiva (o nulla).



Pressione di radiazione

Quando l'onda elettromagnetica incide su un corpo, le cariche contenute in questo sono sottoposte ad una forza che le muove nella direzione del campo elettrico. Per effetto di questa forza, acquistano una velocità perpendicolare al campo magnetico e quindi subiscono una forza nella direzione di propagazione dell'onda, cioè una pressione.



Se il corpo (di superficie A) assorbe tutta l'energia dell'onda elettromagnetica nel tempo Δt , le cariche si spostano di un tratto Δx nella direzione del campo elettrico:

$$\underbrace{SA\Delta t}_{\text{energia ceduta dall'onda elettromagnetica}} = F_e \Delta x = \left(E \sum_i q_i \right) \Delta x \Rightarrow \boxed{S = \frac{\sum_i q_i}{A} E \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sigma E \langle v \rangle}$$

$\swarrow$
 $\swarrow$
 $\swarrow$

densità superficiale di carica
 velocità media acquisita dalle cariche

Sotto l'azione del campo magnetico, il moto delle cariche parallelo alla superficie genera una forza perpendicolare alla superficie che origina una pressione:

$$P_{\text{rad}} = \frac{F}{A} = \frac{\langle v \rangle B \sum_i q_i}{A} = \sigma B \langle v \rangle = \frac{\sigma E \langle v \rangle}{c}$$

$$\boxed{P_{\text{rad}} = \frac{S}{c}}$$

Quantità di moto dell'onda elettromagnetica

Nell'intervallo di tempo Δt la superficie assorbe l'energia contenuta nel volume $\Delta V = Ac\Delta t$.

La forza esercitata sulle particelle nell'intervallo di tempo Δt produce in queste una variazione di quantità di moto $\Delta p = F\Delta t = AP\Delta t$.


pressione

La densità di quantità di moto dell'onda elettromagnetica è quindi:

$$p_{\text{rad}} = \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{AP_{\text{rad}}\Delta t}{Ac\Delta t} = \frac{S}{c^2}$$

Vettorialmente:

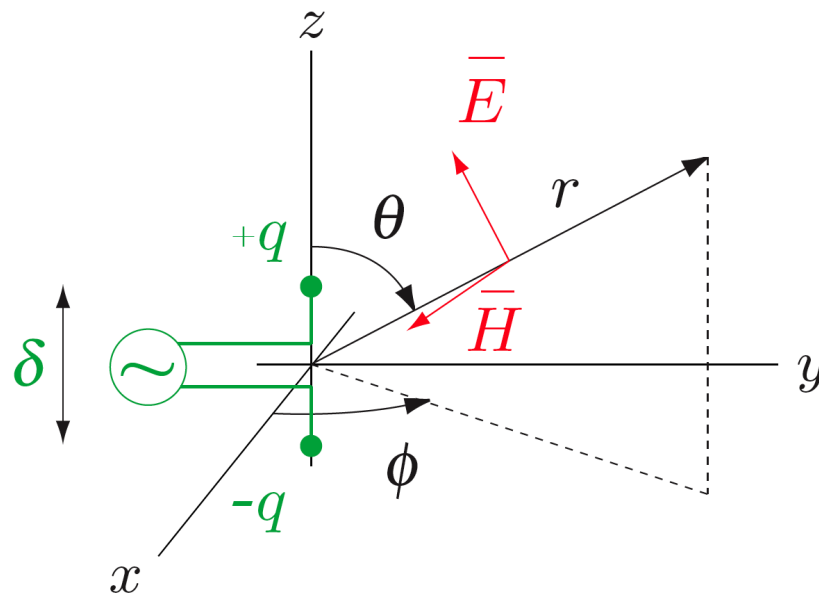
$$\bar{p}_{\text{rad}} = \frac{\bar{E} \times \bar{H}}{c^2}$$

Radiazione di dipolo

Si intende con radiazione di dipolo l'emissione di onde elettromagnetiche nello spazio da parte di un dipolo elettrico il cui momento oscilla sinusoidalmente nel tempo.



principio su cui si basano le antenne per la generazione e la ricezione di onde elettromagnetiche



Il generatore applica un potenziale oscillante:

$$V = V_0 \cos(\omega t)$$

che fa muovere le cariche positive e negative lungo l'antenna (asse Z), creando un momento di dipolo variabile:

$$p = p_0 \cos(\omega t) = q\delta \cos(\omega t)$$

- 1 *L'oscillazione del momento di dipolo produce una variazione di campo elettrico nello spazio circostante che genera un campo magnetico variabile, che a sua volta genera un campo elettrico, ecc. ...*



L'oscillazione del momento di dipolo produce un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio

- 2 *Dipendenza dei campi dalla distanza (propagazione nel vuoto).
Per il principio di conservazione dell'energia ogni superficie sferica di raggio r con centro nel dipolo deve essere attraversata dalla stessa quantità di energia:*

$$\frac{U}{\Delta t} = 4\pi r^2 \langle S(r) \rangle = \text{costante}$$

↘ densità media del flusso di energia che attraversa la superficie sferica di raggio r



$$|\overline{E} \times \overline{H}| = S(r) \propto \frac{1}{r^2}$$



$$E \propto \frac{1}{r} \quad H \propto \frac{1}{r}$$

- 3 *Direzione di propagazione dell'onda.*
Radiale per simmetria.



$$E, H \propto \cos(\omega t - kr)$$

- 4 *Direzione di E e H.*

Il campo magnetico prodotto dalle correnti che costituiscono il dipolo oscillante forma un sistema di cerchi concentrici attorno all'asse z:



$$\overline{H} = H_{\phi} \hat{\phi}$$

Il campo elettrico deve essere perpendicolare al campo magnetico.



$$\overline{E} = E_{\theta} \hat{\theta}$$

5 Forma funzionale di E e H .

In generale:

$$E = E_\theta = \underbrace{A(\omega, c, p_0)}_{\text{l'ampiezza è una funzione della frequenza } \omega, \text{ della velocità della luce } c \text{ e del momento di dipolo massimo } p_0} \underbrace{f(\theta)}_{\text{funzione dell'angolo rispetto alla direzione del dipolo}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \cos(\omega t - kr)$$

l'ampiezza è una funzione della frequenza ω , della velocità della luce c e del momento di dipolo massimo p_0 .

funzione dell'angolo rispetto alla direzione del dipolo

$$H = H_\phi = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_\theta$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{B}{\mu_0} = \frac{E}{c\mu_0} = \\ &= \frac{E\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\mu_0} = E\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \end{aligned}$$

➡ Derivazione di A da considerazioni dimensionali:

$$\begin{aligned} [A] &= [\omega^\alpha c^\beta p_0^\gamma] = \left[\left(\frac{1}{s} \right)^\alpha \left(\frac{m}{s} \right)^\beta (Cm)^\gamma \right] \\ A = \omega^\alpha c^\beta p_0^\gamma &\Rightarrow = [E\epsilon_0 r] = \left[\frac{N}{C} \frac{C^2}{Nm^2} m \right] = \left[\frac{C}{m} \right] \\ &\Rightarrow \alpha = 2, \beta = -2, \gamma = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = k \frac{p_0 \omega^2}{c^2}}$$

costante adimensionale che si può calcolare e vale 1.

Nota: $p = p_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2 p}{dt^2} = p_0 \omega^2 \cos(\omega t)$



A dipende dall'accelerazione delle cariche di dipolo, non dalla loro velocità

➔ *Dipendenza angolare $f(\theta)$.*

A grande distanza il campo elettrico deve essere massimo nel piano equatoriale ($\theta = \pm \pi/2$) e nulla lungo l'asse del dipolo ($\theta = 0, \pi$), in analogia col dipolo elettrico:

$$f(\theta) = \sin \theta$$

CONCLUSIONE: *A grande distanza*

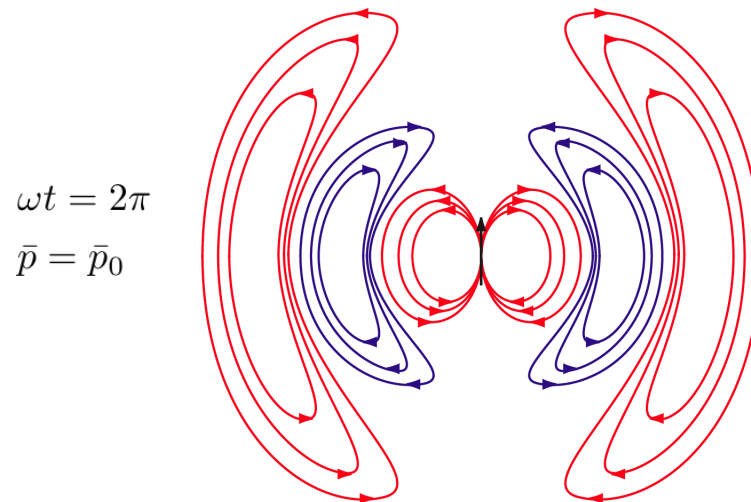
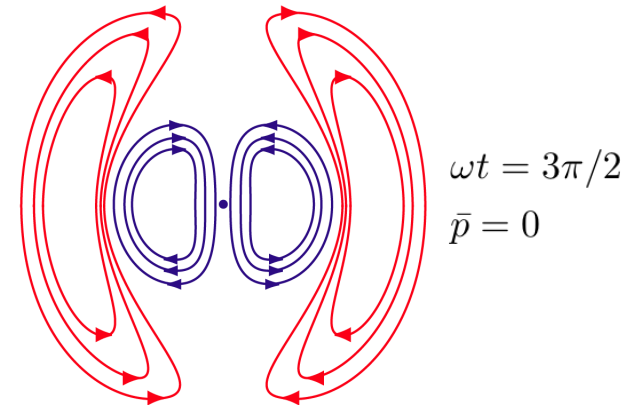
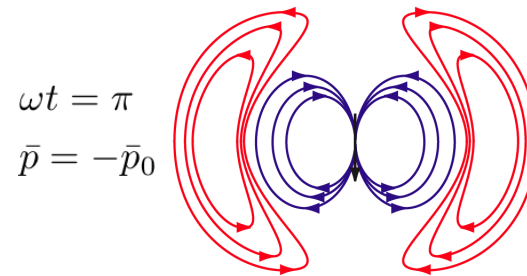
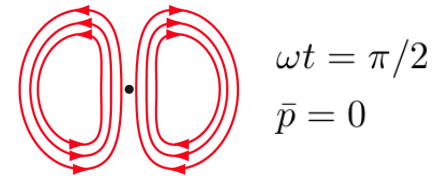
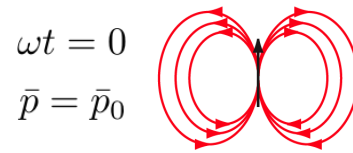
$$E = E_\theta = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r c^2} \cos(\omega t - kr)$$

$$H = H_\phi = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c} \cos(\omega t - kr)$$

Potenza irradiata

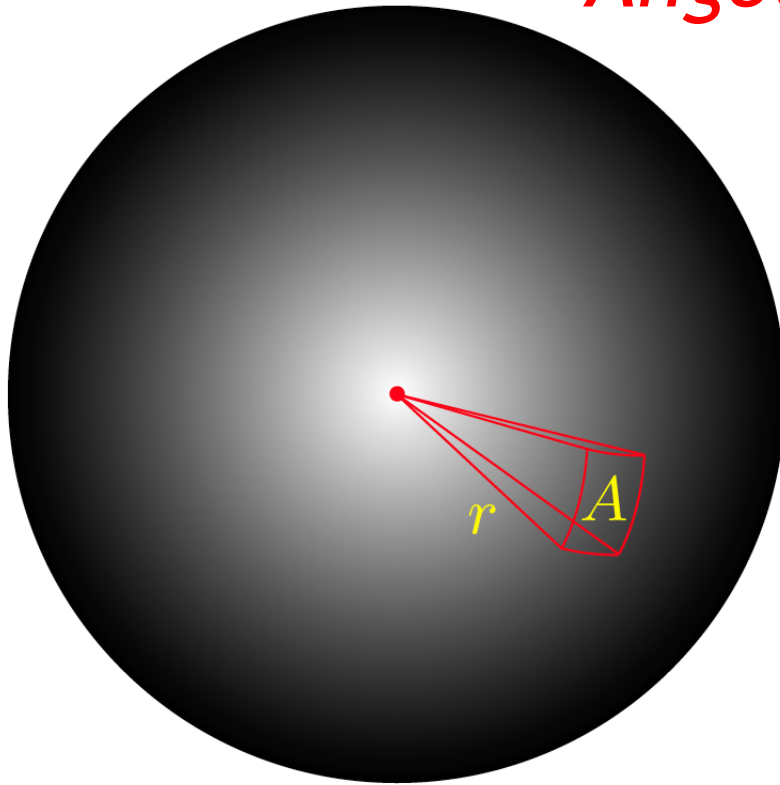
$$\langle S(r, t) \rangle = \langle E_\theta H_\phi \cos^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{2(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$$

Rappresentazione grafica del campo elettrico



A grande distanza l'onda generata tende ad assumere le caratteristiche di un'onda piana.

Angolo solido



Supponendo che un'emittente irradi in modo isotropo nello spazio, e che un'antenna ricevente ad una distanza r dall'emittente abbia un'area A , la frazione di potenza intercettata dall'antenna è:

$$f = \frac{A}{4\pi r^2}$$

l'angolo solido sotteso è quindi di:

$$\frac{A}{r^2} \text{ [steradiani]}$$

Angolo solido: $\Omega = \frac{A}{r^2}$

in analogia con l'angolo in due dimensioni (s = arco di cerchio): $\theta = \frac{s}{r}$

L'angolo solido "giro" è di $\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ steradiani