Ottica fisica - Interferenza

1. Principi di sovrapposizione e di Huygens
2. Interferenza
3. Riflessione e trasmissione della luce

Principio di sovrapposizione

In un sistema meccanico in cui si propaga un'onda:

ciascun punto è sottoposto a:

- *forza di richiamo*
- *attrito*
- *forza esterna oscillante (o impulsata)*

la perturbazione (se il sistema è lineare) varia nel tempo secondo l'equazione:

$$\frac{d^2(\delta\bar{r})}{dt^2} + \mu\frac{d(\delta\bar{r})}{dt} + \omega_n^2(\delta\bar{r}) = \bar{F}$$

spostamento rispetto alla posizione di equilibrio

Se agiscono più forze:

$$\frac{d^2\sum_i(\delta\bar{r})_i}{dt^2} + \mu\frac{d\sum_i(\delta\bar{r})_i}{dt} + \omega_n^2\sum_i(\delta\bar{r})_i = \sum_i \bar{F}_i$$

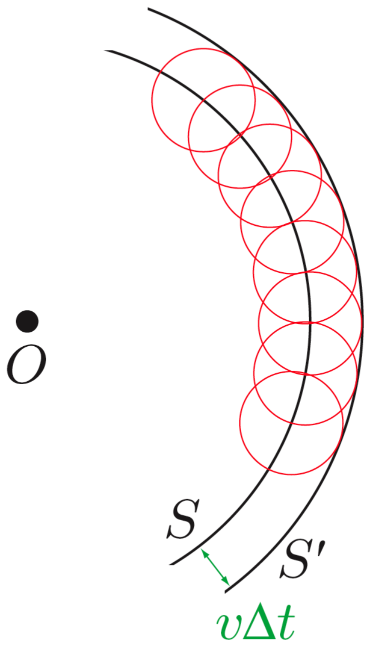
cioè lo spostamento risultante è:

$$\delta\bar{r} = \sum_i(\delta\bar{r})_i$$

Principio di Huygens

"Ognuna delle particelle per mezzo delle quali un'onda si propaga comunica il suo moto a tutte le particelle che sono in contatto con essa. Ogni particella può quindi essere considerata la sorgente di un'onda elementare".

Esempio: onde circolari in acqua



In base al principio di sovrapposizione, la somma delle onde secondarie è l'onda principale che si propaga

S' = *posizione del* $\boxed{\text{fronte d'onda}}$ → *insieme dei punti a distanza* $v\Delta t$ *dall'origine*

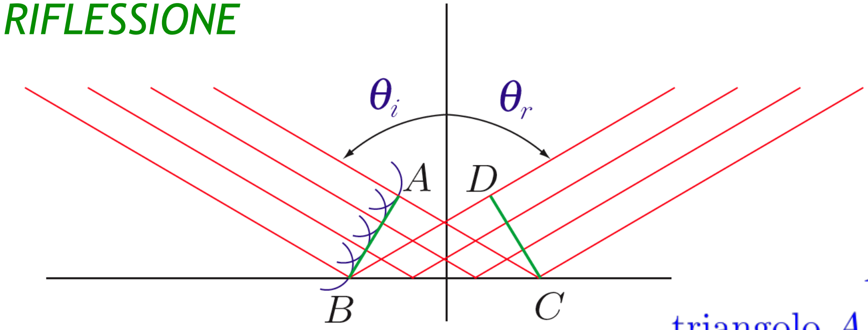
dopo un tempo Δt

= tangente a tutti i cerchi che hanno il centro in S

Esempio: riflessione e rifrazione

Onda piana ➠ "raggi" perpendicolari al fronte d'onda

RIFLESSIONE



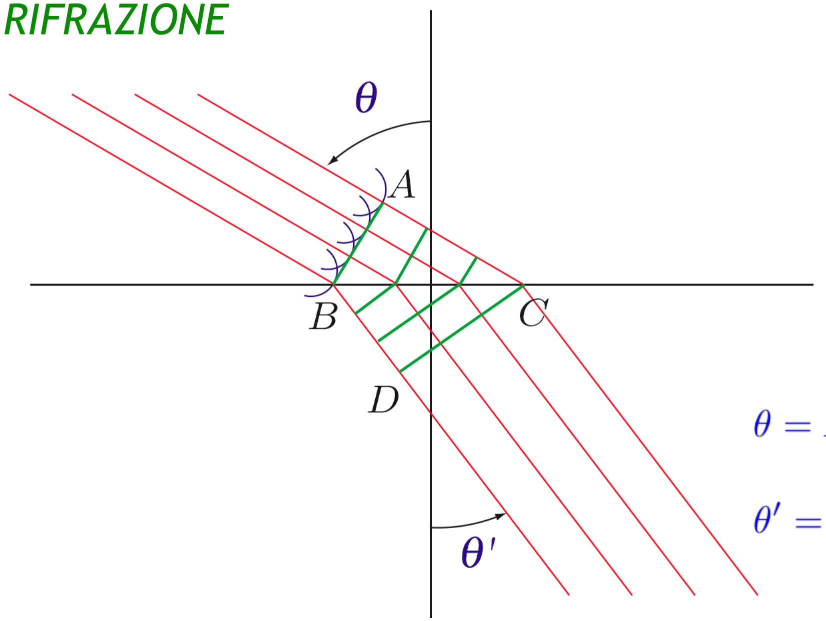
$\theta_i = \widehat{ABC}$

$\theta_r = \widehat{BCD}$

$\underbrace{v_i = v_r}$ *perchè nello stesso mezzo*

$$\left.\begin{array}{c} AC = BD \\ \text{triangolo } ABC = \text{triangolo } BCD \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$$

RIFRAZIONE



$\theta = \widehat{ABC}$

$\theta' = \widehat{BCD}$

$\Delta t = \dfrac{AC}{v} = \dfrac{BD}{v'}$

velocità onda rifratta

velocità onda incidente

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \widehat{ABC} = \arcsin \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{v\Delta t}{BC} \\ \theta' = \widehat{BCD} = \arcsin \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow \sin\theta' = \dfrac{v'\Delta t}{BC} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \dfrac{v}{v'}}$$

Sulla base del principio di sovrapposizione e del principio di Huygens si possono risolvere tutti i problemi di:

interferenza: interazione tra due o più onde

diffrazione: interazione di un'onda con se stessa

Inoltre, quanto detto vale anche per la luce, in quanto onda elettromagnetica.

I processi di interferenza e diffrazione sono particolarmente importanti per la luce, in quanto ne dimostrano la natura ondulatoria.

Interferenza

L'energia trasportata da un'onda è proporzionale alla metà dell'ampiezza al quadrato:

Esempio: onda sinusoidale in un mezzo materiale senza attriti $\Rightarrow \quad K + U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

Due onde:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= A_1 e^{i\omega t} \\ f_2 &= A_2 e^{i(\omega t + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sfasamento}}}{\phi})} \end{aligned}\right\}$$

Ovviamente, solo la parte reale rappresenta l'onda

Somma: $\quad f = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i(\omega t + \phi)}$

La quantità che interessa è la media rispetto al tempo dell'energia trasportata:

$$\langle [f]^2_{\mathrm{Re}} \rangle = \langle A^2 \rangle$$

$$
\begin{aligned}
\langle [f]^2_{\mathrm{Re}} \rangle &= \langle [A_1^2 \cos^2(\omega t) + 2A_1A_2\cos(\omega t)\cos(\omega t+\phi) + A_2^2\cos^2(\omega t+\phi)] \rangle = \\
&= \langle [A_1^2\cos^2(\omega t)] \rangle + \langle [2A_1A_2\cos(\omega t)\cos(\omega t+\phi)] \rangle + \langle [A_2^2\cos^2(\omega t+\phi)] \rangle = \\
&= A_1^2\langle \cos^2(\omega t)\rangle + 2A_1A_2\langle \cos(\omega t)\cos(\omega t+\phi)\rangle + A_2^2\langle \cos^2(\omega t+\phi)\rangle = \\
&= A_1^2\langle \cos^2(\omega t)\rangle + 2A_1A_2\langle \left[\frac{1}{2}\cos(\omega t-\omega t-\phi) + \frac{1}{2}\cos(\omega t+\omega t+\phi)\right]\rangle + A_2^2\langle \cos^2(\omega t+\phi)\rangle = \\
&= A_1^2\underbrace{\langle \cos^2(\omega t)\rangle}_{=\frac{1}{2}} + A_1A_2\underbrace{\langle \cos(-\phi)\rangle}_{=\cos\phi} + A_1A_2\underbrace{\langle \cos(2\omega t+\phi)\rangle}_{=0} + A_2^2\underbrace{\langle \cos^2(\omega t+\phi)\rangle}_{=\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi\right)
\end{aligned}
$$

Energia trasportata media:

$$\boxed{\frac{1}{2}(A_1+A_2)^2 \quad \text{con } \phi = 2m\pi} \qquad \textit{interferenza costruttiva}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(A_1-A_2)^2 \quad \text{con } \phi = (2m+1)\pi} \qquad \textit{interferenza distruttiva}$$

Sorgenti coerenti:

quando la differenza di fase tra le onde da esse generate non dipende dal tempo

Se le due onde si propagano in un mezzo non dispersivo (k costante), percorrendo distanze diverse:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = A_1 e^{i(\omega t - ks_1)} \\ f_2 = A_1 e^{i(\omega t - ks_2)} \end{array}\right\} \phi = (\omega t - ks_1) - (\omega t - ks_2) = k\Delta s$$

e le condizioni per l'interferenza costruttiva e distruttiva sono:

$$\phi = 2m\pi \;\Rightarrow\; \Delta s = \underline{2m}\frac{\lambda}{2}$$ interferenza costruttiva

numero pari di semilunghezze d'onda

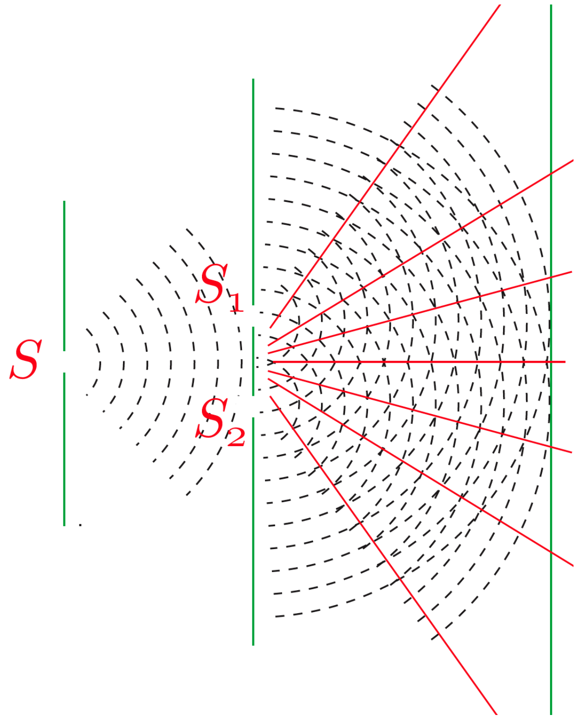
$$\phi = (2m+1)\pi \;\Rightarrow\; \Delta s = \underline{(2m+1)}\frac{\lambda}{2}$$ interferenza distruttiva

numero dispari di semilunghezze d'onda

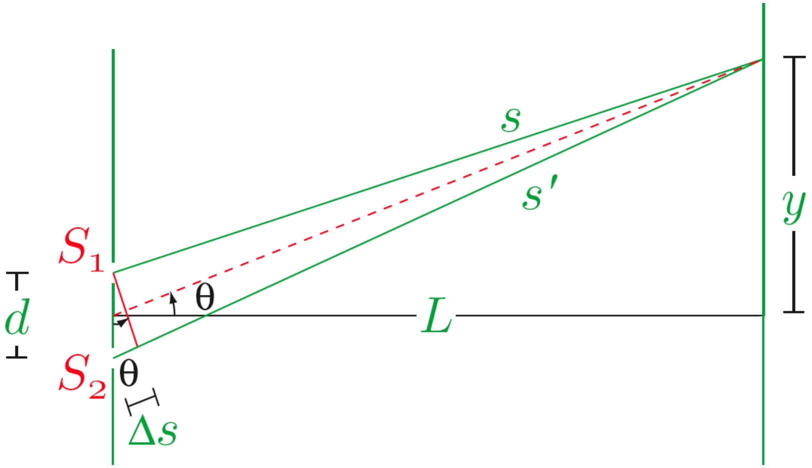
Al giorno d'oggi, i LASER (Light Amplification through Stimulated Emission of Light) permettono di produrre fasci intensi di luce coerente e monocromatica.

Esperimento di Young

Nel 1802 Thomas Young dimostrò che la luce poteva produrre fenomeni di interferenza, e che quindi aveva natura ondulatoria, con l'apparato in figura.



La (piccola) fenditura S, colpita da un raggio monocromatico (ottenuto con un prisma), agisce, in base al principio di Huygens, come una sorgente puntiforme. Le due (piccole) fenditure S_1 e S_2, colpite da quest'onda sferica, agiscono a loro volta come due sorgenti puntiformi coerenti. Le linee rosse rappresentano i luoghi dei punti di interferenza costruttiva.



La differenza di cammino ottico dei due raggi è:

$$\Delta s = s' - s = d \sin\theta$$

Di conseguenza:

$d\sin\theta = 2m\dfrac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; \sin\theta = m\dfrac{\lambda}{d}$	*interferenza costruttiva*	*frange chiare*
$d\sin\theta = (2m+1)\dfrac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; \sin\theta = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{d}$	*interferenza distruttiva*	*frange scure*

Per simmetria la frangia centrale (y=0) è chiara.

Un interferometro può essere usato per misurare la lunghezza d'onda di una sorgente monocromatica

Intensità della luce

Ipotesi: $L \gg d \;\Rightarrow\; \theta$ piccolo

L'intensità della luce proveniente da S_1 è uguale a quella proveniente da S_2, ed è la stessa che si ha nel massimo centrale.

$A_1 = A_2 = A_0$ $\qquad$ $\phi = k\Delta s = kd\sin\theta$

$$\langle [f]^2_{\mathrm{Re}} \rangle = \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos\phi\right) = A_0^2(1+\cos\phi)$$

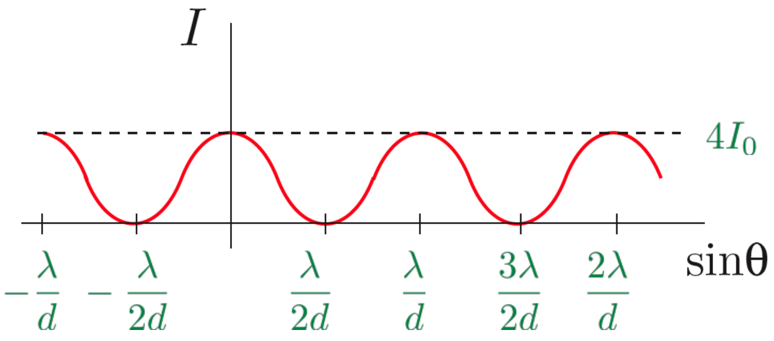
$$= A_0^2[1+\cos(kd\sin\theta)] = 2A_0^2\cos^2\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)$$

Per la luce, il vettore di Pointing è: $\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} \Rightarrow S = EH = \dfrac{EB}{\mu_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(B = \frac{E}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{E^2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\mu_0} = E^2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle S \rangle = I_0 = \frac{1}{2}E^2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$ intensità media dei fasci incidenti



Nota sulle dimensioni

$$H = E\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

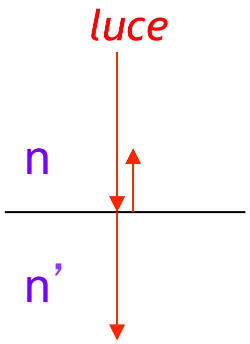
$$[\mathrm{H}] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]\ ;\ [\mathrm{E}] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left[\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}\right] = \left[\frac{1}{\Omega}\right]$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{377}\,\Omega^{-1}$$

Coefficienti di trasmissione e riflessione

Incidenza normale

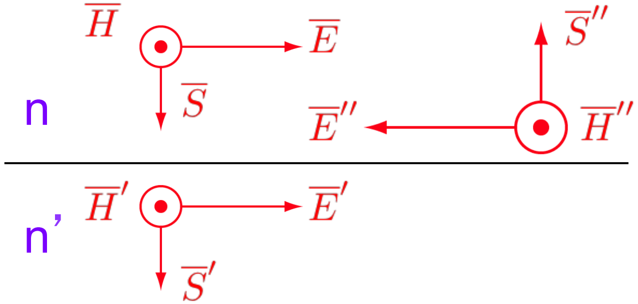


$$\theta = \theta' = 0^\circ$$

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

$$n' = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}}$$

Nell'onda riflessa il vettore di Pointing ha direzione invertita ➟ la direzione del campo elettrico (o del campo magnetico) è invertita.



$$\overline{E}' = \tau \overline{E}$$

coefficiente di trasmissione

$$\overline{E}'' = \rho \overline{E}$$

coefficiente di riflessione

I campi ai due lati della superficie di separazione devono essere uguali:

$$\overline{E} + \overline{E}'' = \overline{E}' \Rightarrow \overline{E} = \overline{E}' - \overline{E}''$$

$$\overline{H} + \overline{H}'' = \overline{H}' \Rightarrow \overline{H} = \overline{H}' - \overline{H}''$$

Vettori di Pointing:

$$S = n\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2 \qquad \left(H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E \simeq \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}E\right)$$

$$S' = n'\tau\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2$$

$$S'' = -n\rho\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2$$

$$H'' = -\rho H$$

$$
\left.\begin{aligned} E &= E' - E'' = \tau E - \rho E \\ H &= H' - H'' = nE = n'\tau E + n\rho E \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \rho = \frac{n - n'}{n + n'} \qquad \tau = \frac{2n}{n + n'}
$$

se $n<n'$ *allora* $\rho<0$

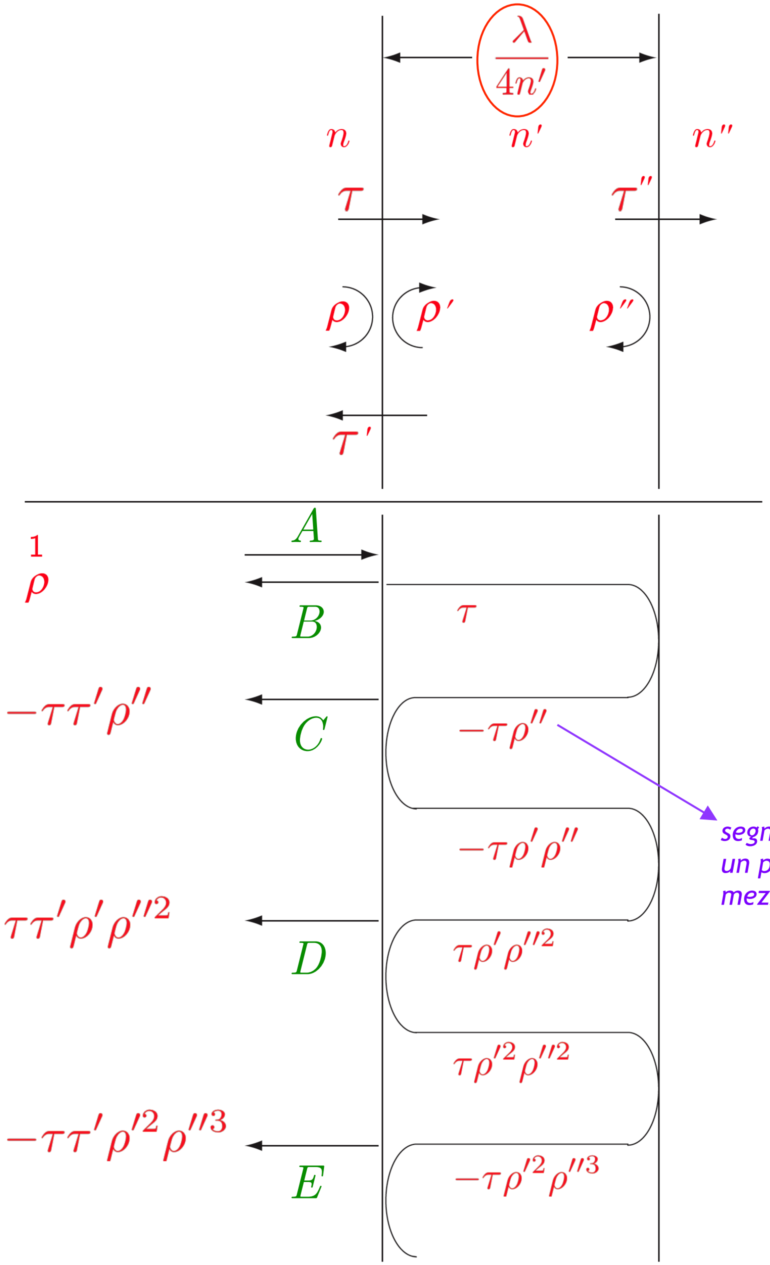
$$
R = \left(\frac{E''}{E}\right)^2 = \rho^2
$$

RIFLETTANZA *(rapporto tra potenza riflessa e potenza incidente)*

$$
T = \frac{n'}{n}\left(\frac{E'}{E}\right)^2 = \frac{n'}{n}\tau^2 = 1 - \rho^2
$$

TRASMITTANZA *(rapporto tra potenza trasmessa e potenza incidente)*

Pellicole antiriflettenti



Condizioni:

$n < n' < n''$ $(\rho<0, \rho'>0, \rho''<0)$

spessore dello strato sottile: $\frac{\lambda}{4n'}$

$$C = -\tau\tau'\rho'' = -(1-\rho^2)\rho'' \simeq -\rho'' \ (\rho^2 \ll 1)$$

Interferenza distruttiva se:

$$B = -C \Rightarrow \rho'' = \frac{n'-n''}{n'+n''} \simeq \frac{n-n'}{n+n'} = \rho$$

cioè:

$$\boxed{n' \simeq \sqrt{nn''}}$$

segno negativo perchè c'è un percorso addizionale di mezza lunghezza d'onda

$$\begin{aligned}
\tau\tau' &= \frac{2n}{n+n'}\frac{2n'}{n'+n} = \frac{4nn'}{(n+n')^2} \\
(1-\rho^2) &= 1-\frac{(n-n')^2}{(n+n')^2} = \\
&= \frac{n^2+2nn'+n'^2-n^2+2nn'-n'^2}{(n+n')^2} = \frac{4nn'}{(n+n')^2}
\end{aligned}$$