

Ottica fisica - Diffrazione

- 1. Diffrazione di Fraunhofer*
- 2. Risoluzione di una lente*
- 3. Reticoli di diffrazione*

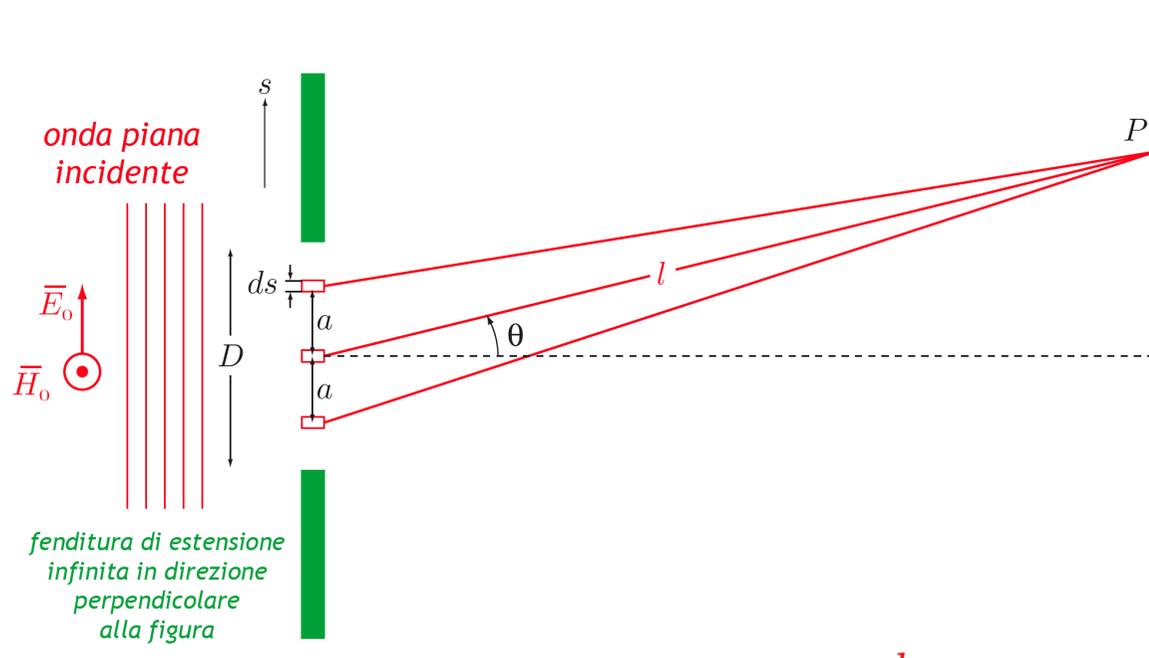
Diffrazione

Interferenza di un'onda con se stessa, in presenza di aperture od ostacoli sul percorso dell'onda.

Prime osservazioni: Grimaldi (fine 1600)

Misure: Young (inizio 1800)

Diffrazione di Fraunhofer



Ciascun punto della fenditura emette, in base al principio di Huygens, un'onda elementare.

Ipotesi di Fresnel: l'ampiezza delle onde elementari di Huygens è proporzionale all'area del fronte d'onda da cui sono irradiate.

Ampiezza dell'onda emessa da ds : $dE = E_0 \frac{ds}{D}$

Onda in P in funzione del punto di partenza:

$$\begin{cases} e^{i[\omega t - kl]} & \text{ad } s = 0 \\ e^{i[\omega t - k(l - a \sin \theta)]} & \text{ad } s = +a \\ e^{i[\omega t - k(l + a \sin \theta)]} & \text{ad } s = -a \end{cases}$$

In generale: $e^{i[\omega t - k(l - s \sin \theta)]}$



Somma delle onde in P : $E = \int dE = \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kl + ks \sin \theta)} ds$

$$E = \int dE = \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kl - ks \sin \theta)} ds$$

$$= \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kl)} \int_{-D/2}^{+D/2} e^{-iks \sin \theta} ds$$

$$= \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kl)} \frac{e^{i \frac{D}{2} k \sin \theta} - e^{-i \frac{D}{2} k \sin \theta}}{ik \sin \theta}$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - kl)} \frac{\sin \left(\frac{D}{2} k \sin \theta \right)}{\frac{D}{2} k \sin \theta}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i \sin x - \cos x + i \sin x = 2i \sin x$$

In termini di intensità:

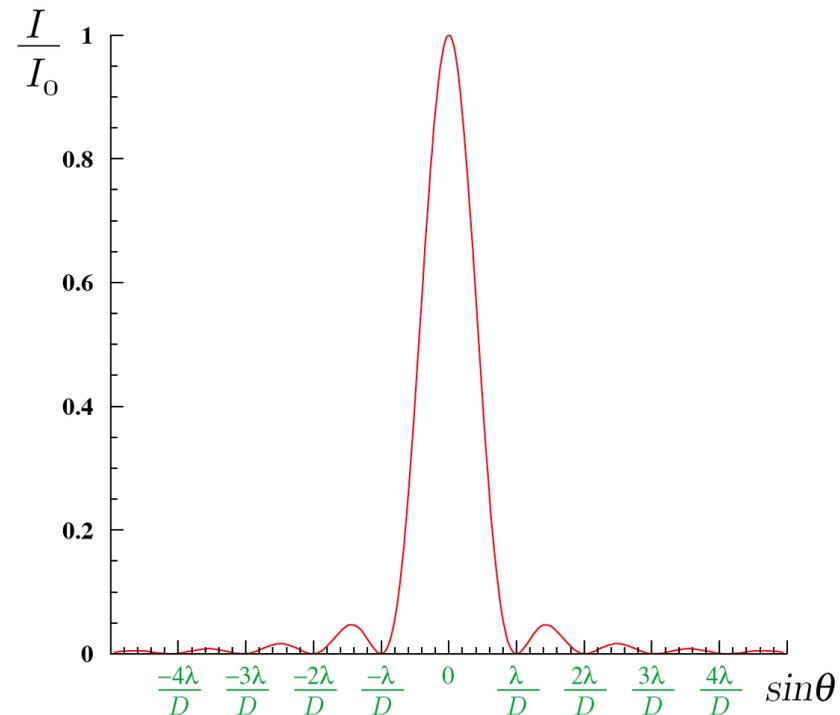
$$I = \frac{1}{2} E^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{D}{2} k \sin \theta \right)}{\left(\frac{D}{2} k \sin \theta \right)^2}$$

Minimi a:

$$\frac{D}{2} k \sin \theta = m\pi \Rightarrow \sin \theta = m \frac{\lambda}{D} \quad (m \neq 0)$$

Massimi a:

$$\frac{D}{2} k \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \Rightarrow \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{D}$$



Note

La figura di interferenza dipende dalla distanza fra le fenditure, non dalla loro larghezza.

La figura di diffrazione dipende dalla larghezza delle fenditure.

I massimi principali della figura di interferenza si ripetono con regolarità e non diminuiscono di intensità all'aumentare dell'ordine m (per $L \gg D$).

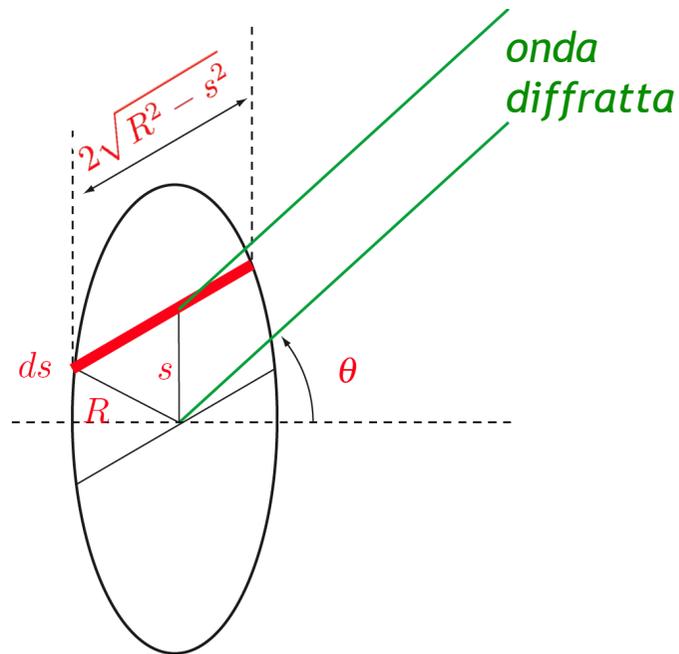
Nella figura di diffrazione l'unico massimo principale è quello centrale e l'intensità dei massimi secondari diminuisce con l'ordine m .

$$\frac{I_m}{I_0} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{m + \frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} k D \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k D \sin \theta \right)}{\left(\frac{1}{2} k D \sin \theta \right)^2} = \frac{\sin^2 \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]}{\left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2}$$

Diffrazione di Fraunhofer da un'apertura circolare



$$dE = E_0 \frac{2\sqrt{R^2 - s^2}}{\pi R^2} ds$$

La soluzione dell'integrale sulla superficie dell'apertura dà il primo minimo a:

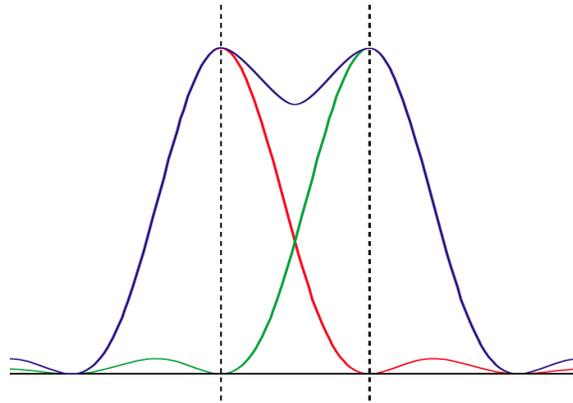
$$\sin \theta = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

In questo caso le frangie chiare e scure sono anelli concentrici rispetto al massimo centrale.

Limite di risoluzione

Criterio di Rayleigh:

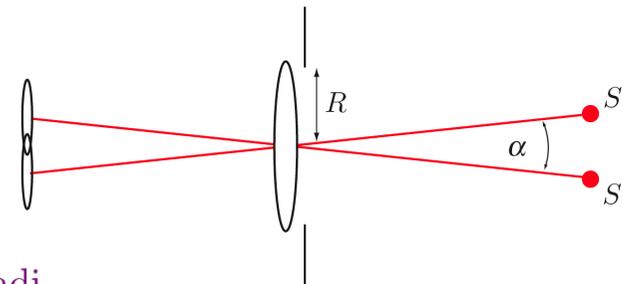
Due sorgenti (e le relative immagini) si dicono al limite di risoluzione se il massimo centrale della figura di diffrazione creata da una di esse coincide con il primo minimo della figura di diffrazione creata dall'altra.



Valido se le sorgenti sono incoerenti (altrimenti ci sono effetti di interferenza).

Telescopio da 1 m (luce verde-blu, 500 nm):

$$\sin \alpha \simeq \alpha = \frac{0.61 \times 5 \times 10^{-7} \text{ m}}{1 \text{ m}} = 3 \times 10^{-7} \text{ rad} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ gradi}$$

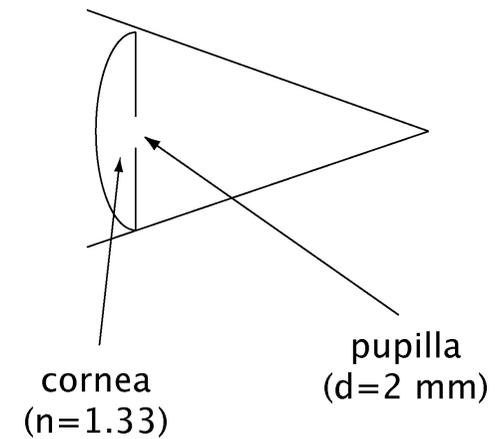


Occhio umano

Calcolare l'angolo limite di risoluzione dell'occhio umano, assumendo un diametro della pupilla di 2 mm, una lunghezza d'onda di 500 nm in aria e un indice di rifrazione dell'occhio pari a 1.33. Determinarne la risoluzione spaziale a una distanza $L=25$ cm.

$$\theta_m = 1.22 \frac{\lambda/n}{d} = 2.29 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\Delta = L\theta_m = 5.73 \times 10^{-3} \text{ cm}$$



Stampa:

$$300 \text{ ppi} \rightarrow 1 \text{ pixel} = 85 \mu\text{m} = 8.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$(1 \text{ inch} = 25.4 \text{ mm})$$

Interferenza multipla

N sorgenti, l' n -esima separata di un angolo $(n-1)\phi$ rispetto alla prima:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 + e^{-i\phi} + e^{-i2\phi} + e^{-i3\phi} + \dots + e^{-i(n-1)\phi} \right]$$

$$\text{se } x < 1 : \sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$



$$\frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}}$$

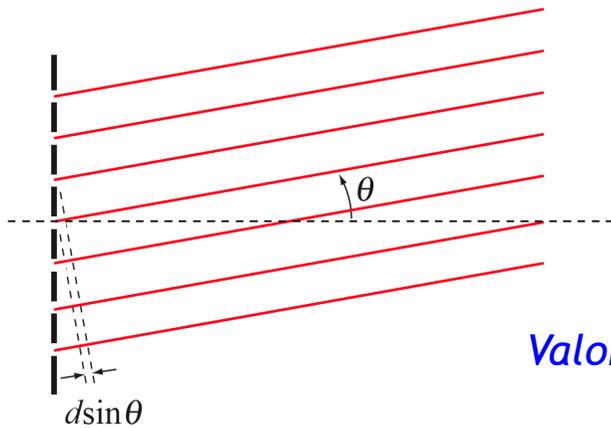
$$= E_0 e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}}$$

L'intensità media del campo elettrico è:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E E^* = I_0 \frac{(1 - e^{-iN\phi})(1 - e^{iN\phi})}{(1 - e^{-i\phi})(1 - e^{i\phi})} \\ &= I_0 \frac{2 - 2 \cos(N\phi)}{2 - 2 \cos \phi} \\ &= I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

Serie di fenditure (reticolo)

Differenza di fase tra due fenditure consecutive: $\phi = kd \sin \theta$



$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N k d \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k d \sin \theta \right)}$$

Valore massimo di I/I_0 : $\lim_{\phi \rightarrow 2m\pi} \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N \phi \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \phi \right)} = N^2$

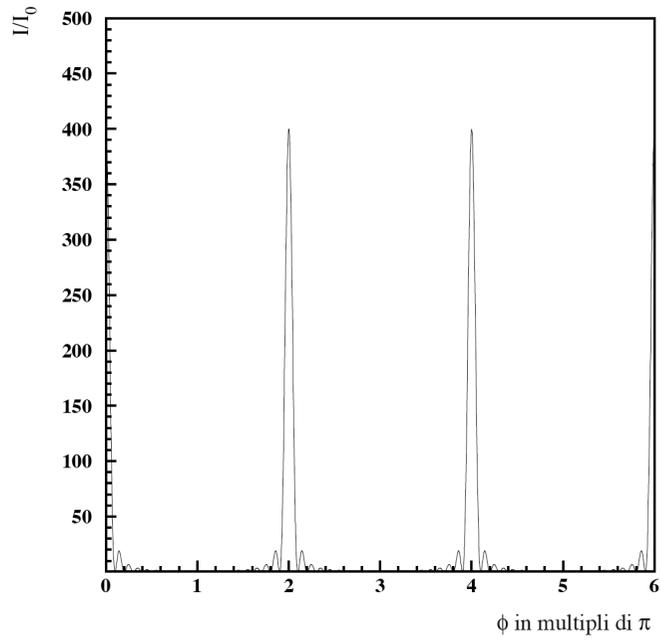
- ci sono massimi principali per $\phi = 2m\pi$

- tra due massimi principali ci sono $(N-1)$ minimi equidistanti:

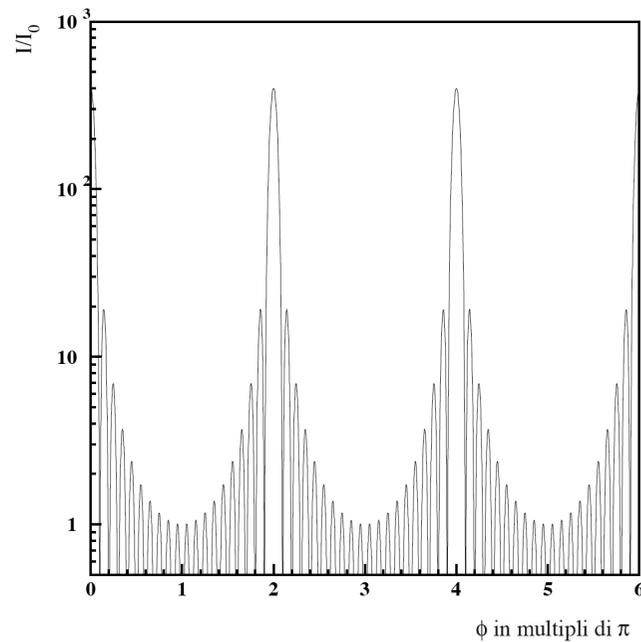
$$\phi = 2m\pi \pm \frac{2m'\pi}{N}, \quad (m' = 1, 2, 3, \dots, N - 1)$$

- tra due massimi principali ci sono $(N-2)$ massimi locali di intensità molto minore di N^2 :

$$\phi = 2m\pi \pm \frac{(2m'' + 1)\pi}{N}, \quad (m'' = 1, 2, 3, \dots, N - 2)$$



$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}N\phi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right)}, \quad (N = 20)$$



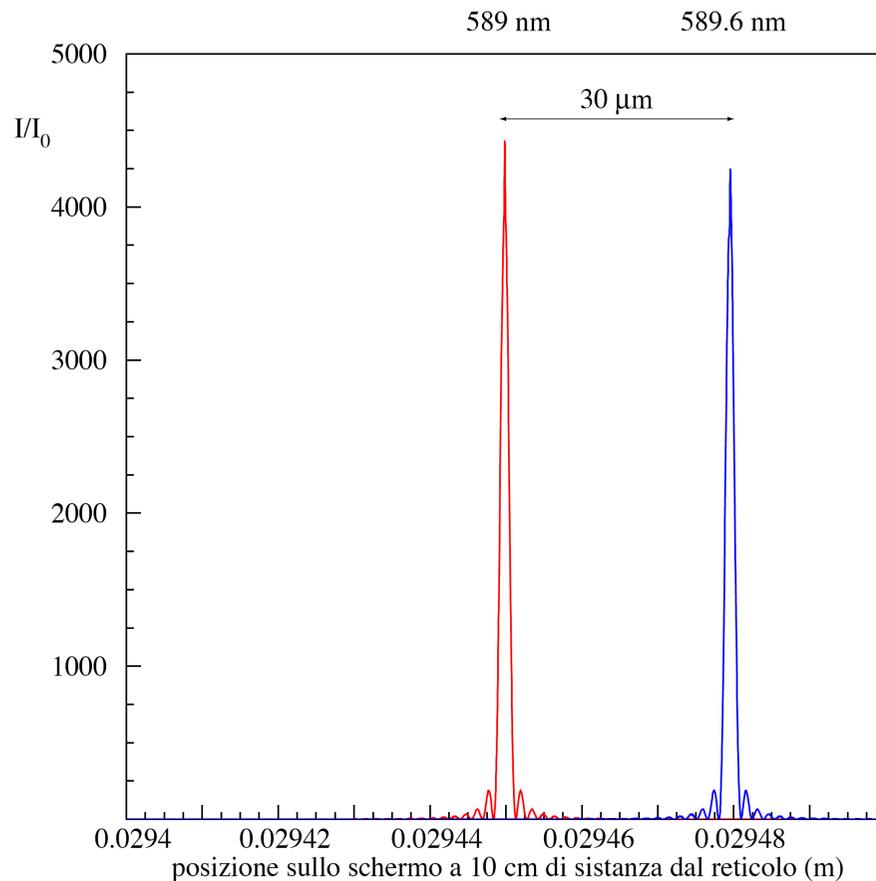
Esempio:

Reticolo di diffrazione con $N = 20000$, $d = 2 \times 10^{-4}$ cm

Schermo a 10 cm di distanza dal reticolo

Potere separatore del reticolo: $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm = 2 \times 10^4$ (per $m=1$)

ordine dello spettro



Le due righe gialle del sodio sono situate a:

$$\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}, \lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$$

dove il potere risolutivo è:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{\lambda}{R} = \frac{5.893 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4} \\ &= 2.947 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.029 \text{ nm} \end{aligned}$$

La separazione tra le righe considerate è:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 0.6 \text{ nm} = \text{potere risolutivo} \times 20$$

Spettroscopia

La luce emessa da un gas contiene solo le lunghezze d'onda caratteristiche delle molecole che lo compongono (effetto quantistico).

Fatta eccezione per quella centrale, le posizioni angolari delle diverse immagini risultano proporzionali alla lunghezza d'onda:

$$\phi = kd \sin \theta_m = 2m\pi$$



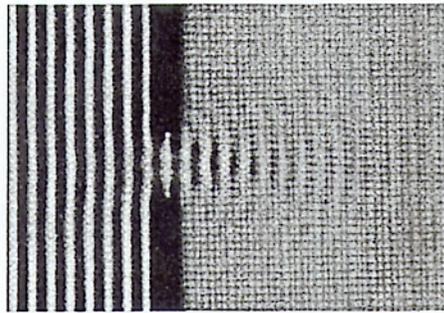
$$\sin \theta_m = \frac{2\pi m}{kd} = \frac{\lambda}{d} m$$

Il primo massimo di interferenza a luce rossa ($\lambda=700$ nm) è più lontano del primo massimo di interferenza a luce violetta ($\lambda=400$ nm).
Tra questi due estremi sono compresi tutti gli altri colori.

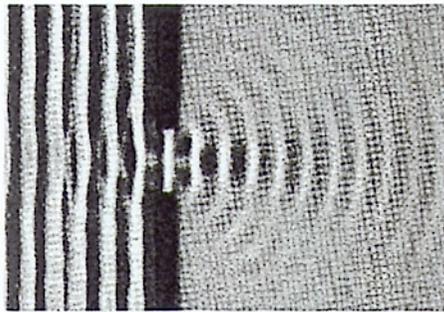
Nota: Lo spettro del primo ordine è l'unico "puro":

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta_2 = \frac{1400}{d} \text{ (rosso)} \\ \sin \theta_3 = \frac{1200}{d} \text{ (violetto)} \end{array} \right\} \text{ il secondo ordine del colore rosso è più lontano del terzo ordine del colore violetto}$$

Diffrazione di onde in acqua



(a)



(b)



(c)

Larghezza del massimo centrale: $2 \frac{\lambda}{D}$

Fig. 10.2 Diffraction through an aperture with varying λ as seen in a ripple tank. [Photo courtesy PSSC *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.]

Esempi

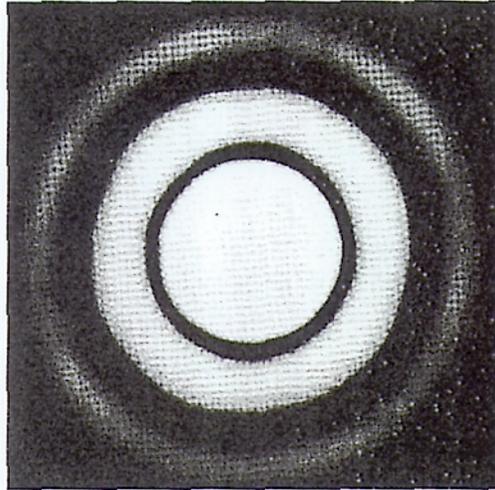


Fig. 10.29 Airy rings (0.5 mm hole diameter). [Photo by E.H.]

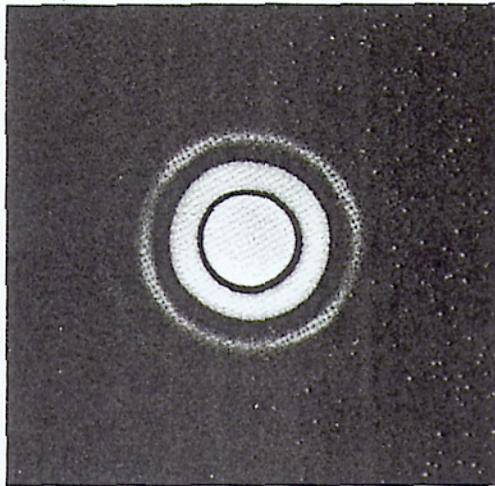
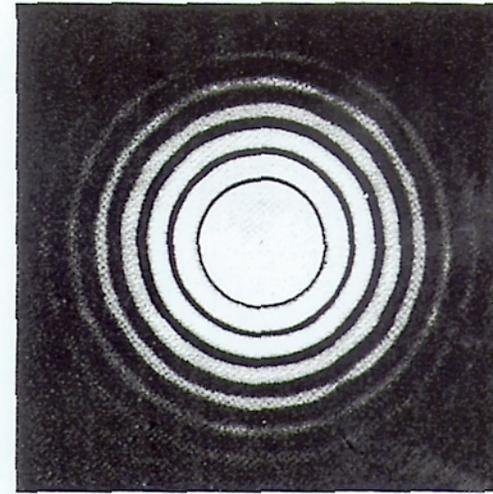
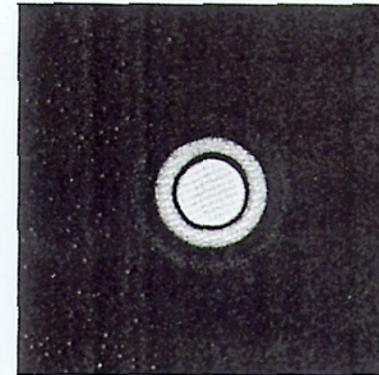


Fig. 10.30 Airy rings (1.0 mm hole diameter). [Photo by E.H.]



(a)



(b)

Fig. 10.31 (a) Airy rings—long exposure (1.5 mm hole diameter).
(b) Central Airy disc—short exposure with the same aperture.
[Photos by E.H.]

Esempi

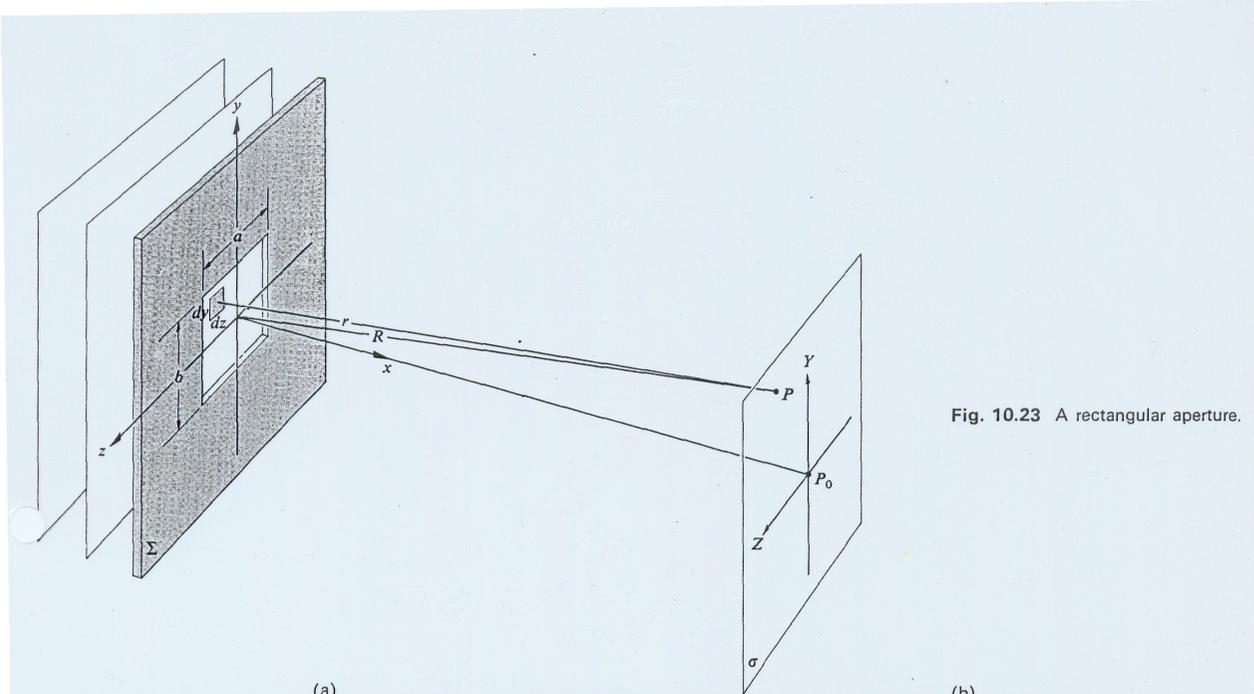


Fig. 10.23 A rectangular aperture.

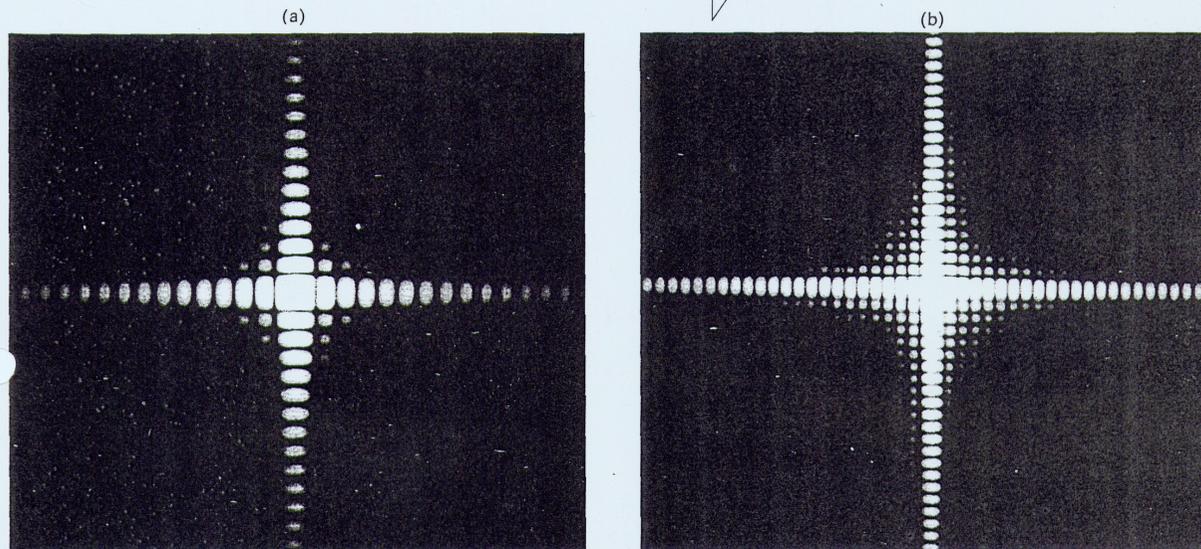
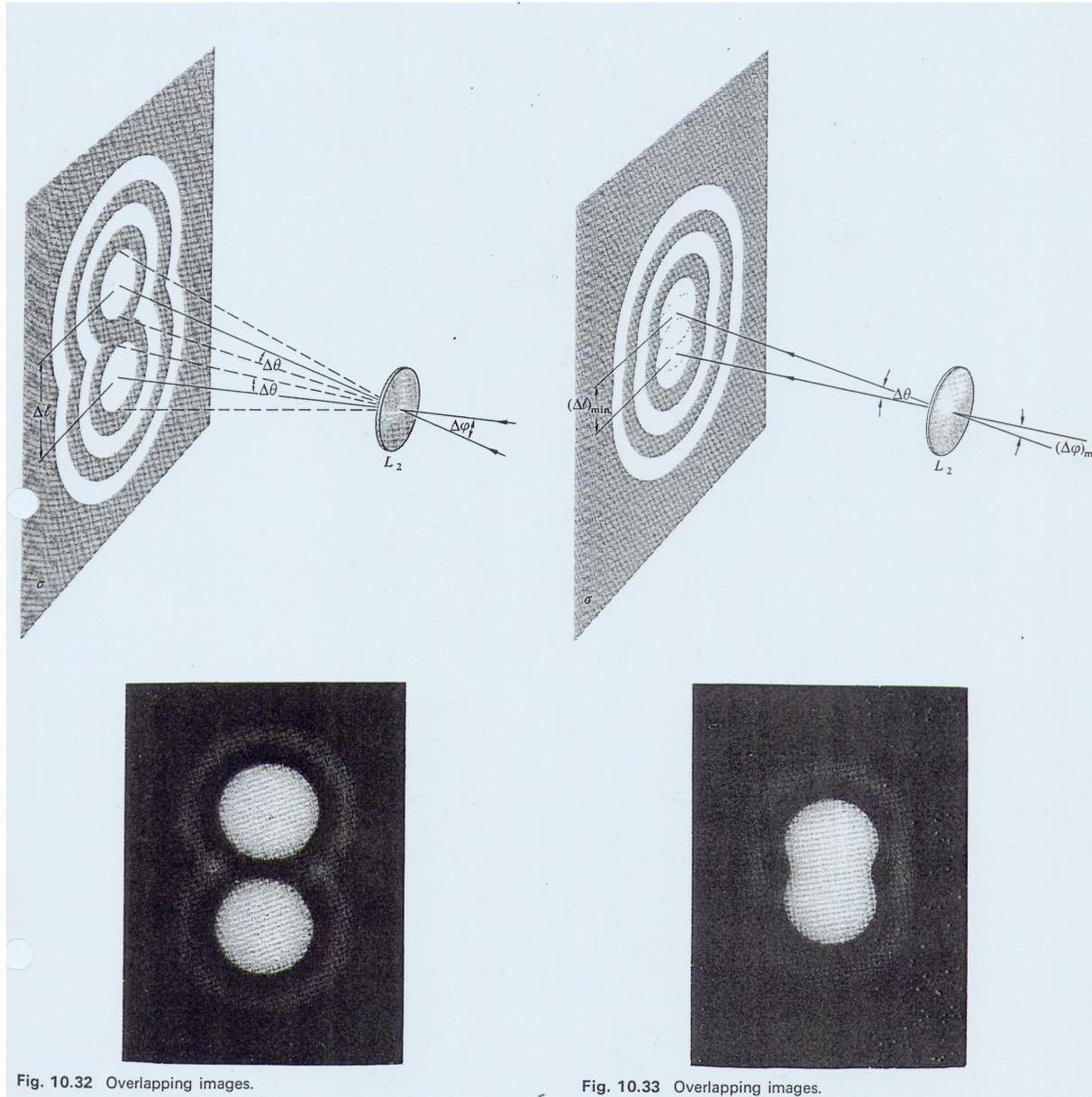


Fig. 10.24 (a) Fraunhofer pattern of a square aperture. (b) The same pattern further exposed to bring out some of the faint terms. [Photos by E.H.]

Esempi



Esempi

Diffrazione + interferenza

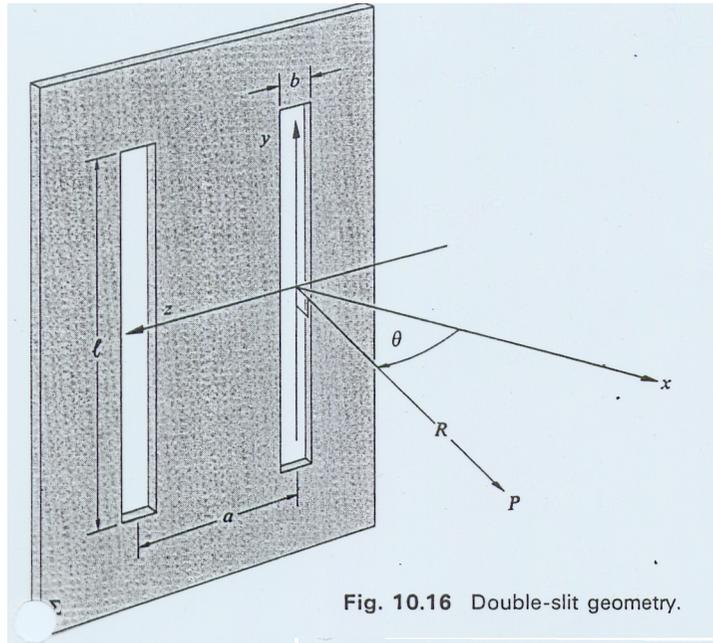


Fig. 10.16 Double-slit geometry.

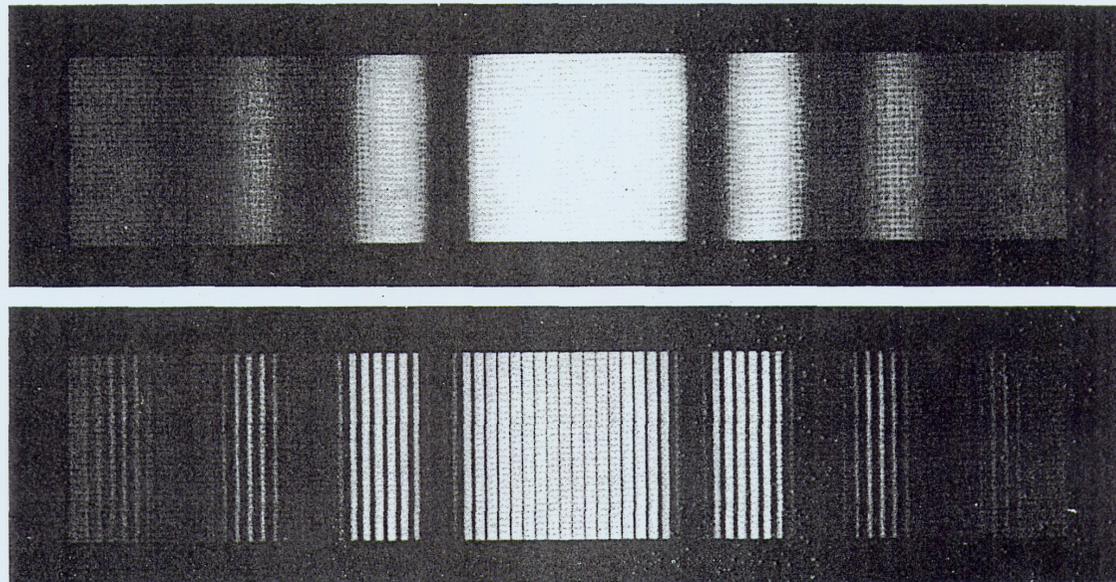


Fig. 10.17 Single- and double-slit Fraunhofer patterns. The faint cross hatching arises entirely in the printing process. [Photos courtesy M. Cagnet, M. Francon, and J. C. Thierr: *Atlas optique des Erscheinungen*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1962.]