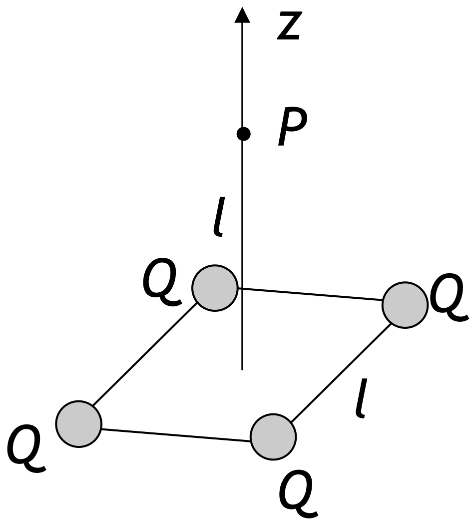
Esercizi

Elettrostatica

Quattro cariche eguali Q sono poste su ognuno degli spigoli di un quadrato di lato l (piano xy). Determinare il modulo del campo elettrico generato da una singola carica e dall'insieme delle cariche in un punto P sull'asse del quadrato a distanza l (cioè sull'asse z nel punto (0,0,l) se l'origine è al centro del quadrato).

(dati del problema Q=6 μC, l=1 m)



La distanza di ogni carica dal punto dato vale:

$$r = \sqrt{l^2/2 + l^2} = l\sqrt{3/2}$$

Ognuna delle cariche genera un campo in modulo pari a:

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_o l^2} = 3.6 \cdot 10^4\ V/m$$

La componente di tale campo nella direzione del piano del quadrato si annulla con quella dello spigolo opposto. Per cui solo la componente lungo l'asse del quadrato non è nulla ed è eguale per tutti gli spigoli:

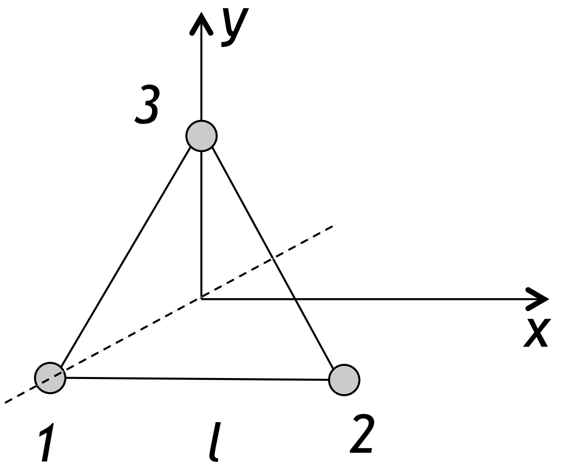
$$E_a = |E|\frac{l}{r} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_o l^2}\frac{l}{r} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_o l^2}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Quindi sommando i 4 contributi:

$$|E_t| = \frac{4Q}{6\pi\varepsilon_o l^2}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1.17 \cdot 10^5\ V/m$$

Tre cariche eguali q praticamente puntiformi sono poste nel vuoto ai vertici di un triangolo equilatero di lato l. Quale carica q_o va posta nel centro del triangolo affinché la forza che agisce su ciascuna carica risulti nulla?

(dati del problema q=0.1 μC)



Al centro di ogni poligono regolare il campo elettrico è nullo per ragioni semplici di geometria. Quindi ci interessa solo la forza che agisce sugli spigoli del triangolo. Se definiamo 1 e 2 le cariche in basso e 3 quella in alto disponendole come in figura. Detto l il lato del triangolo:

$$|F_{13}| = |F_{23}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}$$

Le componenti delle due forze nella direzione x si annullano a vicenda per cui rimane solo la componente lungo y se definisco θ l'angolo formato dalla verticale con i lati obliqui del triangolo. Tale angolo vale 30^o . Quindi la componente lungo l'asse y di tali forze valge:

$$F_{13y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}\cos\theta$$

Quindi la forza totale vale:

$$F_{ty} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}\sqrt{3}$$

avendo sostituito a $\cos 30^o$ il suo valore $\sqrt{3/2}$.
La distanza dai vertici della carica al centro è l'ipotenusa (r) di un triangolo rettangolo con cateto $l/2$ e angolo tra ipotenusa e cateto di 30^o . Quindi:

$$r\cos 30^o = \frac{l}{2} \qquad \rightarrow r = l/\sqrt{3}$$

Quindi la forza dovuta dalla carica al centro:

$$F_{0y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_o q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_o q}{(l/\sqrt{3})^2}$$

Affinché la forza totale sia nulla:

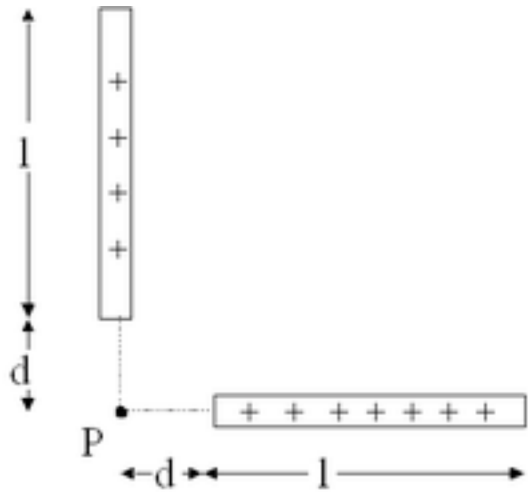
$$\frac{qq_o}{4\pi\epsilon_o(l/\sqrt{3})^2} + \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_o l^2} = 0$$

quindi:

$$q_o = -q\frac{\sqrt{3}}{3} = -58\ nC$$

Due sbarrette sottili di materiale isolante, lunghe l, sono disposte perpendicolarmente tra di loro. Su ciascuna sbarretta è distribuita uniformemente una carica q. Detta d la distanza del punto P dalla estremità delle due sbarrette, determinare l'intensita' del campo elettrico in P.

(dati del problema l=1 m, q=5 nC, d=0.1 m)



La densità di carica sulle barrette è:

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Il campo generato dalla prima barretta vale:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_d^{d+l}\frac{\lambda dx}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{l}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right] = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d(d+l)}$$

Per simmetria quello generato dall'altra sbarretta vale:

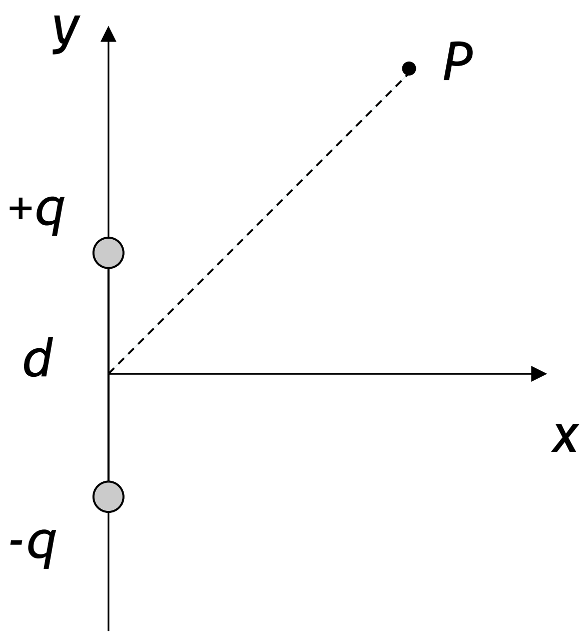
$$E_y = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d(d+l)}$$

Quindi l'intensità del campo vale:

$$|E| = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_o d(d+l)} = 578\ V/m$$

Un dipolo: due cariche q di segno opposto, sono poste nel vuoto ad una distanza d. Determinare il rapporto tra l'intensità esatta ed approssimata del campo elettrico ad una distanza 2d dal loro centro, in un punto la cui congiungente con il centro delle cariche forma un angolo θ con la congiungente delle cariche stesse.

(dati del problema q=1 nC, d=1 cm, $\theta = 45^0$)



Assunto come origine il centro delle due cariche e la loro congiungente come asse delle y, mentre la perpendicolare sul piano è l'asse delle x: $-q$ è in $(0, -d/2, 0)$, $+q$ in $(0, d/2, 0)$, mentre il punto è in $(d\sqrt{2}, d\sqrt{2}, 0)$. Quindi la distanza dalla carica negativa vale:

$$|r^-| = \sqrt{(d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2} + d/2)^2} = 2.4d$$

mentre la distanza dalla carica positiva vale:

$$|r^+| = \sqrt{(d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2} - d/2)^2} = 1.7d$$

I campi valgono:

$$E^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(1.7d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.346$$

$$E^- = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(2.4d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.174$$

Le componenti x e y dei campi sono:

$$E_x^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.346\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{(d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2} - d/2)^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.291$$

$$E_y^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.346\frac{d\sqrt{2} - d/2}{\sqrt{(d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2} - d/2)^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.188$$

$$E_x^- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.174\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{(d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2} + d/2)^2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.103$$

$$E_y^- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.174\frac{d\sqrt{2} + d/2}{\sqrt{(d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2} + d/2)^2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.140$$

Da cui:

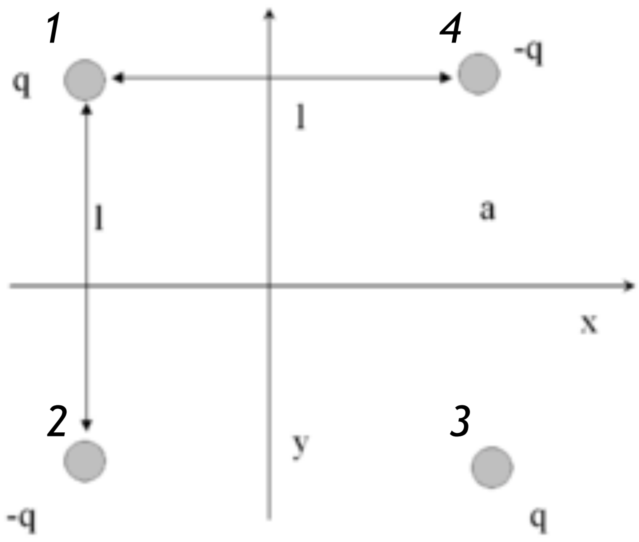
$$E_x = 0.187\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}$$

$$E_y = 0.048\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}$$

$$|E| = 0.194\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}$$

Sui vertici di un quadrato di lato l sono disposte delle cariche eguali in modulo q, ma di segno opposto, in maniera che vertici vicini hanno carica opposta.
Scrivere l'espressione del campo elettrico lungo l'asse delle x, ed in particolare calcolarne il valore per x=0, l, 10 l.

(dati del problema: q=4 μC, l=10 cm)



Sull'asse x solo la componente y del campo elettrico è diversa da 0.
In particolare le due cariche più distanti rispetto un punto sull'asse delle x positivo generano (sommate) un campo:

$$E_{12} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(x+\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2}$$

mentre le più vicine generano un campo:

$$E_{34} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(x-\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2}$$

Le componenti y dei due campi sono:

$$E_{12y} = -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(x+\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2}\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2}} = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o\left[(x+\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2\right]^{3/2}}$$

$$E_{34y} = +2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(x-\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2}\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o\left[(x-\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2\right]^{3/2}}$$

Quindi in totale:

$$E_y = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{1}{\left[(x-\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(x+\frac{l}{2})^2+(\frac{l}{2})^2\right]^{3/2}}\right\}$$

Ovviamente tale funzione vale 0 per $x=0$, mentre per gli altri due casi:y

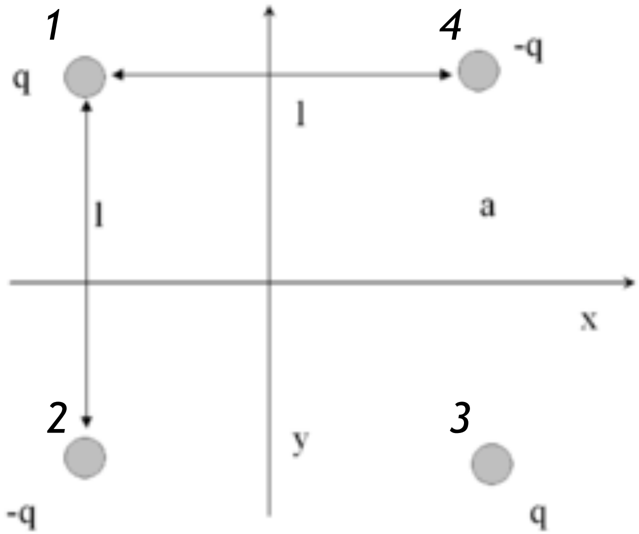
$$E_y(x=l) = 9.3\ MV/m$$

$$E_y(x=10l) = 1.08\ kV/m$$

A grande distanza si comporta come un quadrupolo il cui campo diminuisce con la quarta potenza della distanza.

Sui vertici di un quadrato di lato l sono disposte delle cariche eguali in modulo q, ma di segno opposto, in maniera che vertici vicini hanno carica opposta.
Scrivere l'espressione del campo elettrico lungo l'asse delle x, ed in particolare calcolarne il valore per x=0, l, 10 l.

(dati del problema: q=4 μC, l=10 cm)



Soluzione con il potenziale.
Dato un punto generico $P = (x, y)$, i potenziali nel punto dovuti alle quattro cariche sono:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2}};\quad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-q}{\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+(y+\frac{l}{2})^2}};$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+(y+\frac{l}{2})^2}};\quad V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-q}{\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+(y-\frac{l}{2})^2}};$$

Il potenziale totale è $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, e la componente y di $\overline{E}$ è:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_4}{\partial y}$$

dove la derivata parziale indica che nell'operazione di derivata bisogna considerare x come una costante.

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_1}{\partial y} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2}}\right\}\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{-2\left(y-\frac{l}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2\right]^{-1/2}}{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2}\right\}\\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{-\left(y-\frac{l}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}\\
-\frac{\partial V_2}{\partial y} &= -\frac{-q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{-\left(y+\frac{l}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}\\
-\frac{\partial V_3}{\partial y} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{-\left(y+\frac{l}{2}\right)}{\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}\\
-\frac{\partial V_4}{\partial y} &= -\frac{-q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{-\left(y-\frac{l}{2}\right)}{\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}
\end{aligned}$$

A $y = 0$, il campo elettrico è:

$$\begin{aligned}
E_y &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{-\frac{l}{2}-\frac{l}{2}}{\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{+\frac{l}{2}+\frac{l}{2}}{\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right]\\
&= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right]
\end{aligned}$$